CLASSE DE DEUXIÈME ANNÉE PC

OBJECTIFS DE FORMATION ET PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

I. OBJECTIFS DE FORMATION DE LA FILIÈRE PC

1- Objectifs généraux de la formation

Dans la filière Physique et Chimie, les mathématiques constituent conjointement :
- une discipline scientifique à part entière, développant des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques,
- une discipline fournissant des connaissances et des méthodes nécessaires aux sciences physiques, à l'informatique et à la chimie.

La réflexion sur les concepts et les méthodes, ainsi que la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique constituent un objectif majeur. Les étudiants doivent connaître les définitions et les énoncés des théorèmes figurant au programme, savoir analyser la portée des hypothèses et des résultats, et savoir mobiliser leurs connaissances pour l'étude de problèmes. Les démonstrations qui sont utiles à une bonne compréhension du cours sont au programme. En revanche, certains résultats puissants utiles aux sciences de l'ingénieur sont admis.

a) Objectifs de la formation

La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels :
- Développer conjointement l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur.
- Promouvoir la réflexion personnelle des étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre exemples ; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.
- Exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé, sont des éléments indissociables de cette démarche ; valoriser ainsi l'interaction entre d'une part l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques, et d'autre part l'élaboration et la mise en œuvre des concepts théoriques, les phases d'abstraction et de mise en théorie interagissant donc constamment avec celles de passage aux exemples et aux applications.
- Privilégier les problèmes mathématiques susceptibles de développer la réflexion personnelle des étudiants et les capacités de synthèse. En particulier, on ne saurait en aucun cas se limiter à l'étude de problèmes dont les énoncés sont fermés et d'exercices mettant en œuvre des techniques bien répertoriées. Il est nécessaire d'entraîner les étudiants à se poser eux-mêmes des questions, c'est-à-dire à prendre en compte une problématique mathématique.

b) Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme d'une même discipline, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. Plus largement, l'enseignement d'une discipline scientifique est à relier à celui des autres disciplines sous deux aspects principaux : organisation concertée des activités d'enseignement d'une même classe ; étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les champs de connaissances (mathématiques et physique, mathématiques et informatique, mathématiques et chimie, ...).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, y contribue de façon efficace, notamment dans le cadre des travaux d'initiative personnelle encadrés.

Il importe aussi que le contenu culturel des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques permettent d'analyser l'interaction entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, mettent en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique et montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière.

2- Architecture et contenus des programmes

a) Intentions majeures

Les contenus sont organisés autour de trois intentions majeures :

- Organiser les programmes autour de quelques notions essentielles, en dégageant les idées majeures et leur portée, en fournissant des outils puissants et efficaces, en évitant toute technicité gratuite, et en écartant les notions qui ne pourraient être traitées que de façon superficielle.

- Donner un rôle très important à la résolution de problèmes et d'exercices d'application, pour certains en mettant en œuvre l'outil informatique. Le but est d'indiquer le champ des problèmes et phénomènes mathématiques à étudier en relation avec les concepts figurant au programme et de préciser les méthodes et les techniques usuelles exigibles des étudiants. En revanche, l'étude de ces problèmes ne doit pas conduire à des dépassements de programme prenant la forme d'une anthologie d'exemples dont la connaissance serait exigible des étudiants.

- Réaliser un équilibre global entre l'algèbre, l'analyse et la géométrie. Il va de soi, d'ailleurs, que cette séparation traditionnelle n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre ces trois grands domaines des mathématiques. Dans cette intention, les programmes sont présentés selon deux grandes parties : algèbre linéaire et géométrie, analyse et géométrie différentielle, mais le plan du programme n'est pas un plan de cours.

C'est en fonction des objectifs précédents que les programmes sont conçus et que l'horaire hebdomadaire doit être géré. Dans la classe PCSI, il est de 10 heures (7 heures de cours et 3 heures de travaux dirigés) ; dans la classe PC, il est de 9 heures (6 heures de cours et 3 heures de travaux dirigés). Pour valoriser les concepts essentiels et les principales méthodes, il convient de consacrer à leur étude environ 6 heures de cours en classe PCSI et 5 heures de cours en classe PC. Dans les deux classes, les 4 heures restantes (1 heure de cours et 3 heures de travaux dirigés) sont à consacrer à l'étude de problèmes mathématiques de difficulté variée ; à cet égard, toute technicité gratuite est à éviter.

b) Secteur de l'analyse et de ses interventions

Dans ce secteur, le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de fonction et de suite (ou série) qui permettent de modéliser le comportement de modèles continus ou discrets. Les interactions entre le continu et le discret sont mises en valeur, en particulier en seconde année.
Le programme d'analyse combine l'étude des problèmes qualitatifs avec celle de problèmes quantitatifs ; il développe conjointement l'étude du comportement global de suites ou de fonctions avec celle de leur comportement local ou asymptotique. Pour l'ensemble de l'analyse, il met l'accent sur les techniques de majoration.

c) Secteur de l'algèbre et de ses interventions

Dans ce secteur, le programme est centré autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire (points de vue géométrique et matriciel), tandis que l'étude des groupes, des anneaux et des corps en a été écartée.
Le programme met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie.

d) Secteur de la géométrie et de ses interventions

Une vision géométrique des problèmes imprègne l'ensemble du programme de mathématiques car les méthodes de la géométrie jouent un rôle capital en algèbre, en analyse et dans leurs domaines d'intervention par les apports du langage géométrique et des modes de représentation. La géométrie différentielle (étude des courbes et des surfaces) est un élément essentiel de la formation, en relation notamment avec la physique.

e) Articulation avec les sciences physiques et la chimie

En relation étroite avec les concepts propres aux sciences physiques et à la chimie (mécanique, électrocinétique, électronique, optique, cinétique chimique), le programme valorise les interprétations cinématiques et dynamiques des concepts de l'analyse et de la géométrie, ainsi que leurs interprétations en termes de signaux continus ou discrets (vitesse et accélération, trajectoires et lignes de niveau, équations différentielles modélisant l'évolution de systèmes mécaniques, physiques ou chimiques). Ces interprétations, conjointement avec les interprétations graphiques et géométriques, viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse.

3- Conception et organisation de la formation

a) Organisation du travail de la classe

Il convient de centrer l'enseignement autour de l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques, les concepts et les développements théoriques étant au service de cette étude. En particulier, il est essentiel que l'approfondissement théorique ne soit coupé ni des problématiques qui le sous-tendent, ni des secteurs d'intervention qui le mettent en jeu.
Deux objectifs essentiels sont à poursuivre :

- Promouvoir l'acquisition de méthodes et entraîner les étudiants à exploiter toute la richesse de la démarche mathématique ; la classe est donc un lieu de découverte, d'exploitation de problématiques, un lieu de réflexion et de débats sur les démarches suivies, d'analyse des hypothèses d'un théorème et de la portée des concepts mis en jeu et des résultats obtenus. Elle est aussi un lieu d'élaboration de synthèses ayant pour objectif de dégager clairement les idées et méthodes essentielles. Dans cette perspective, les enseignements combinent de façon organique la formulation et l'analyse de problèmes, l'élaboration de concepts, la présentation, la démonstration et la mise en œuvre de résultats, ainsi que la mise en valeur de méthodes.
- Développer les capacités de communication. La pertinence des indications écrites et orales données par le professeur et la qualité de structuration des échanges interpersonnels jouent ici un rôle essentiel : qualités d'écoute et d'expression orale, qualités de lecture et d'expression écrite. La communication utilise des moyens diversifiés : non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément important, mais aussi le rétroprojecteur et l'ordinateur connecté à un vidéoprojecteur.

b) Organisation du travail personnel des étudiants

Les travaux effectués en dehors du temps d'enseignement, à la maison ou au lycée, ont une importance capitale ; leurs fonctions sont diversifiées :

- L'étude du cours joue un rôle central. Son objectif est triple ; connaître les concepts et résultats essentiels, savoir analyser les démarches mises en jeu dans les démonstrations et les techniques de raisonnement, maîtriser les méthodes d'étude des problèmes. L'étude du cours est donc indissociable de celle des problèmes.
- La résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude du cours, a pour fonction d'affermir les connaissances de base des étudiants et d'évaluer leur capacité à les mettre en œuvre sur des exemples simples. La résolution de tels exercices n'est donc pas un objectif en soi, et tout excès de technicité doit être évité. La maîtrise de ce type d'exercices est une exigence valable pour l'ensemble des étudiants.
- L'étude de questions plus complexes, sous forme de préparation d'activités en classe ou de problèmes à résoudre et à rédiger, alimente le travail de recherche, individuel ou en équipe, et permet aux étudiants d'évaluer leur capacité à mobiliser leurs connaissances de façon coordonnée. Au sein d'une même classe, les thèmes d'étude peuvent être diversifiés, en fonction du projet de formation des étudiants.
- Les travaux individuels de rédaction en temps libre (solution d'un problème, mise au point d'exercices étudiés en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte...) visent essentiellement à développer les capacités d'expression écrite et de mise au point d'un raisonnement. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. Ces travaux de rédaction doivent donc être fréquents, mais leur longueur doit rester raisonnable. Leur contenu peut être diversifié en fonction du projet de formation des étudiants.
- La recherche et l'exploitation (individuelle ou en équipe) de documents contribue au développement des capacités d'autonomie. Elle permet aussi de développer l'ouverture d'esprit, grâce à la prise de connaissance de points de vue diversifiés sur une même question, et les capacités d'analyse critique, grâce à une analyse comparée de ces points de vue. Elle permet enfin aux étudiants d'approfondir leurs connaissances en complément des travaux menés en classe ou en fonction de leurs centres d'intérêt et de leur projet de formation.
- La préparation et la mise en œuvre d'exposés visent à développer les capacités d'organisation de la pensée et les qualités d'expression orale.

c) Les épreuves écrites en temps limité

- En première année, ces épreuves doivent être de taille raisonnable et de difficulté progressive, afin de ne pas décourager les étudiants et de leur permettre de rédiger clairement une solution ;
- en seconde année, leur longueur doit être augmentée pour permettre une préparation efficace aux épreuves de concours.

Les connaissances exigibles dans ces épreuves ne doivent en aucun cas dépasser celles qui figurent au programme ; si d'autres connaissances sont à mettre en œuvre, toutes les indications utiles doivent être fournies aux étudiants. Lorsqu'il s'agit d'épreuves de concours de longueur importante, le barème doit en tenir compte.

d) Évaluation et notation des étudiants

La communication des objectifs à atteindre et la mise en œuvre de formes diversifiées d'évaluation peuvent aider de manière efficace les étudiants à progresser, à se situer et à affiner un choix d'orientation.
La pertinence du calibrage de la notation constitue un objectif important ; ce calibrage doit être établi en relation avec les performances attendues des étudiants de seconde année dans les épreuves de concours. Il convient d'éviter tant la surnotation, génératrice d'illusion, que la sousnotation, génératrice de découragement.

e) Interprétation et délimitation des programmes

Pour chacune des classes, les connaissances et les capacités exigibles des étudiants sont indiquées avec précision, de façon à combattre l'inflation théorique autant que l'excès de technicité. Il importe de souligner la nécessité impérieuse de respecter les limites du programme, tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation. Un encyclopédisme relayé par la pratique du bachotage irait totalement à l'encontre du but recherché, qui tend à privilégier une formation de l'esprit scientifique fondée sur l'approfondissement d'un noyau limité de connaissances fondamentales. Il importe que cet état d'esprit trouve sa traduction dans les sujets des épreuves d'évaluation.

4- Organisation du texte des programmes

Ce texte est organisé en deux titres : algèbre linéaire et géométrie, analyse et géométrie différentielle. Chacun de ces titres comporte des parties (numérotées I, II, ...), elles-mêmes subdivisées en chapitres (numérotés 1, 2, ...), puis en paragraphes (repérés a, b, ...). Chacune des parties comporte :
- En tête de partie ou de chapitre, un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre général d'étude des notions relatives à cette partie ou à ce chapitre.
- Pour chaque paragraphe, un texte présenté en deux colonnes ; à gauche sont fixées les connaissances et les méthodes figurant au programme, à droite un commentaire indique les exemples fondamentaux à connaître et les méthodes à maîtriser, précise le sens ou les limites à donner à certaines questions, et repère le cas échéant l'interaction du sujet étudié avec d'autres parties du programme.
- Certains thèmes, qui peuvent donner lieu à l'emploi d'un logiciel de calcul symbolique et formel ou d'un logiciel de programmation, en particulier au cours des travaux pratiques d'informatique, sont repérés par le signe §. Ils complètent la liste donnée sous le titre « ACTIVITÉS ALGORITHMIQUES ET INFORMATIQUES ».

5- Connaissances et capacités exigibles des étudiants

Le programme de mathématiques de la filière Physique et Chimie comporte conjointement celui des classes de seconde année PC et PC*, fixé par le présent texte, et celui de la classe de première année PCSI.

Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, exemples, contre-exemples, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mise en œuvre de ces connaissances, le texte du programme délimite de manière précise trois catégories.

a) *Celles qui sont exigibles des étudiants :* il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents paragraphes, des points qui sont repérés comme tels dans la colonne de droite ou dans les bandeaux, à l'exception de ceux qui sont repérés par la mention « Exemples de ... ». Les démonstrations des résultats concernés sont exigibles des étudiants, sauf mention expresse du contraire.
Enfin, aucun développement ne doit être donné aux notions figurant au programme lorsqu'elles sont uniquement repérées par la locution « définition de ... » ; seule cette définition est alors exigible des étudiants.

b) *Celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants :* il s'agit de tous les travaux dont l'énoncé commence par la locution « Exemples de ... » et des points repérés dans les bandeaux ou dans la colonne de droite par la locution « aucune connaissance spécifique sur ... n'est exigible des étudiants ». Lorsqu'une épreuve d'évaluation fait intervenir de telles connaissances ou de telles capacités, toutes les indications utiles doivent être fournies aux étudiants.
En ce qui concerne les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérés dans la colonne de droite par la locution « la démonstration n'est pas exigible des étudiants », le professeur peut, suivant les cas, démontrer en détail le résultat considéré, indiquer l'idée de sa démonstration ou l'admettre.

c) *Celles qui sont indiquées comme étant « hors programme »* dans les bandeaux ou dans la colonne de droite. Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation.
En particulier, la locution « la démonstration est hors programme » signifie qu'il est demandé d'admettre le résultat ; aucune épreuve d'évaluation ne peut comporter une telle démonstration.

II PROGRAMME DES CLASSES PC ET PC*

ACTIVITÉS ALGORITHMIQUES ET INFORMATIQUE

1- Intégration de l'outil informatique

a) La démarche algorithmique

En relation avec le programme d'informatique, l'ensemble du programme de mathématiques valorise la démarche algorithmique ; il intègre la construction et la mise en forme d'algorithmes. Les algorithmes associés aux notions étudiées dans le programme de mathématiques en font partie. En revanche, en mathématiques, aucune connaissance sur la théorie des algorithmes, aucun résultat général sur leurs performances n'est exigible des étudiants.

b) Le calcul symbolique et formel. L'emploi des calculatrices.

Les étudiants doivent être entraînés à l'utilisation en mathématiques du logiciel de calcul symbolique et formel pour la résolution de problèmes, la formulation de conjectures, ou la représentation graphique de résultats. L'utilisation de ce logiciel évite des calculs fastidieux, et permet l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles. Ils doivent pareillement savoir utiliser une calculatrice possédant des fonctionnalités de calcul formel.

Ils doivent également savoir utiliser une calculatrice programmable, dans les situations liées au programme de mathématiques. Cette utilisation permet notamment la mise en œuvre d'une partie des algorithmes du programme, à l'occasion des travaux pratiques de mathématiques.

Ils doivent savoir programmer une instruction séquentielle, une instruction conditionnelle et une instruction itérative comportant éventuellement un test d'arrêt.

2- Propositions d'activités algorithmiques

À titre d'illustration, les seules compétences exigibles des étudiants étant celles décrites ci-dessus, le professeur pourra aborder certains des exemples indiqués ci-dessous ; il s'agit d'exemples, qui ne constituent en aucun cas une extension du programme.

a) Arithmétique

Algorithme d'exponentiation rapide.
Algorithme d'Euclide.

b) Algèbre linéaire

Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.	Lissage par moindres carrés. Résolution de systèmes linéaires sur-déterminés. Inversion d'une matrice.
Résolution de systèmes linéaires tri-diagonaux.	Détermination d'une fonction spline cubique. Résolution approchée de certaines équations aux dérivées partielles.
Détermination des éléments propres d'une matrice symétrique.	Méthode de Jacobi.
Détermination d'éléments propres pour des matrices de grande dimension.	Méthode de la puissance itérée.

c) Analyse

Approximation du point fixe d'une application scalaire par itération.	Résolution d'équations numériques. Méthode de Newton.
Approximation du point fixe d'une application vectorielle par itération.	Résolution de systèmes d'équations numériques. Méthode de Newton.

3- Propositions d'utilisation d'un logiciel de calcul formel

En plus des points énumérés dans les paragraphes a) et b) ci-dessus, un logiciel de calcul formel pourra être utilisé en analyse, en particulier dans les domaines suivants :

Représentation des surfaces.	Lignes de niveau.
Étude d'équations différentielles.	Tracé des courbes intégrales.
Approximation des fonctions.	Séries de Fourier.

SOMMAIRE

2- Intégration sur un segment des fonctions à valeurs vectorielles

a) Intégrale d'une fonction continue par morceaux
b) Convergence en moyenne quadratique

3- Dérivation et intégration

a) Primitives et intégrale d'une fonction continue
b) Étude globale des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$
c) Formules de Taylor
d) Séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

4- Intégrales impropres

a) Définition d'une intégrale impropre convergente
b) Intégrales des fonctions positives
c) Intégrales absolument convergentes

5- Intégration sur un intervalle quelconque

a) Définition
b) Convergence en moyenne quadratique
c) Convergence dominée
d) Intégration terme à terme d'une série de fonctions

6- Intégrales dépendant d'un paramètre

a) Continuité sous le signe $\displaystyle\int$
b) Dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ (formule de Leibniz)

III. SÉRIES, SÉRIES ENTIÈRES, SÉRIES DE FOURIER

1- Séries de nombres réels ou complexes

a) Comparaison d'une série à une intégrale
b) Produit de deux séries absolument convergentes

2- Séries entières

a) Rayon de convergence d'une série entière
b) Séries entières d'une variable réelle

3- Séries de Fourier

a) Coefficients de Fourier
b) Convergence en moyenne quadratique.
c) Convergence ponctuelle

IV. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1- Équations différentielles linéaires

a) Systèmes linéaires à coefficients constants
b) Équations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2

2- Notions sur les équations différentielles non linéaires

V. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES

1- Calcul différentiel

a) Applications de classe $\mathcal{C}^1$
b) Fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$
c) Dérivées partielles d'ordre supérieur
d) Équations aux dérivées partielles

2- Calcul intégral

VI. GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

1- Courbes du plan et de l'espace

a) Courbes paramétrées
b) Étude locale d'un arc orienté γ de classe $\mathcal{C}^k$
c) Étude métrique d'un arc orienté

2- Courbes et surfaces

a) Plan tangent à une surface
b) Intersection de deux surfaces
c) Surfaces usuelles

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE

Le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire : espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes, projecteurs ; bases, dimension et rang ; valeurs propres et sous-espaces propres d'un endomorphisme. Le programme met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie.

La maîtrise de l'algèbre linéaire en dimension finie et, notamment, de l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et points) et le point de vue matriciel, constitue un objectif essentiel. Le programme combine, de façon indissociable, l'étude des concepts de l'algèbre linéaire avec celle des problèmes linéaires (indépendance linéaire, équations linéaires, réduction des endomorphismes et des matrices, approximation des fonctions, propriétés des configurations et des transformations géométriques...).

Le programme d'algèbre et géométrie comporte l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques issus de l'algèbre linéaire ainsi que l'emploi d'un logiciel de calcul symbolique et formel.

I. ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE AFFINE

Le programme est organisé autour de quatre objectifs.
- Consolider les acquis de la classe de première année : étude des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces vectoriels supplémentaires et projecteurs) ; étude des concepts fondamentaux relatifs aux espaces vectoriels de dimension finie (bases, dimension, rang, calcul matriciel) et à la géométrie affine du plan et de l'espace.
- Étudier de nouveaux concepts : somme directe de sous-espaces vectoriels, trace et déterminant d'un endomorphisme.
- Exploiter les acquis pour l'étude de problèmes linéaires issus de l'algèbre (étude des systèmes linéaires, des polynômes ; interpolation, équations aux différences finies) et de l'analyse (récurrences linéaires et équations différentielles linéaires).
- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et applications linéaires) et le point de vue matriciel.
Il convient de ne pas négliger le point de vue géométrique dans l'étude de l'algèbre linéaire et d'illustrer les notions et les résultats par des figures.

Dans cette partie, le corps de base $\mathbf{K}$ *est* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$.

1- Espaces vectoriels ; applications linéaires

a) Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice en dimension quelconque.

Somme directe de sous-espaces vectoriels : définition de la somme $\sum E_i$ d'une famille finie $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E ; définition d'une somme directe $\oplus E_i$ d'une telle famille. Cas des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Dans l'espace vectoriel $\mathbf{K}[X]$, le sous-espace vectoriel $\mathbf{K}[X]\,P$ constitué des multiples d'un polynôme P de degré $n+1$ admet pour sous espace supplémentaire le sous-espace vectoriel $\mathbf{K}_n[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Lorsque E est de dimension finie et que la somme $\sum E_i$ est directe,

$$\dim \underset{i}{\oplus} E_i = \sum_i \dim E_i.$$

Alors, pour que $E = \oplus E_i$, il faut et il suffit que

$$\dim E = \sum_i \dim E_i.$$

Lorsque $E = \oplus E_i$ alors, pour toute famille u_i d'appplications linéaires de E_i dans un espace vectoriel F, il existe une application linéaire u de E dans F et une seule telle que, pour tout i, u_i soit la restriction de u à E_i.

Famille (p_i) de projecteurs de E associée à une décomposition $E = \oplus E_i$; relations $p_i^2 = p_i$, $p_i p_j = 0$ si $j \neq i$ et $\mathrm{I}_E = \sum p_i$.

Définition d'une base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel F de E, à une décomposition en somme directe $E = \oplus E_i$.

b) Image et noyau d'une application linéaire

Une application linéaire u de E dans F définit un isomorphisme de tout supplémentaire E' de $\operatorname{Ker} u$ sur $\operatorname{Im} u$.

Application à l'interpolation de Lagrange : détermination des polynômes P prenant des valeurs données sur une famille $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ d'éléments de $\mathbf{K}$ distincts deux à deux.

Soit u l'application de $\mathbf{K}[X]$ dans $\mathbf{K}^{n+1}$ définie par $u(P) = \big(P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)\big)$. Le noyau de u est constitué des multiples du polynôme $N = \prod(X - a_j)$; en outre, u définit un isomorphisme de $\mathbf{K}_n[X]$ sur $\mathbf{K}^{n+1}$.

§ Exemples d'étude de problèmes d'interpolation linéaire.

c) Équation linéaire

Équation linéaire $f(x) = b$, avec f application linéaire de E vers F de dimensions quelconques.
Cas de l'équation homogène.
Structure des solutions, condition de compatibilité, lien avec $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$. Étude du cas où $b = b_1 + b_2$.

Pour l'équation homogène, l'ensemble des solutions est l'espace vectoriel $\operatorname{Ker} f$.
Dans le cas général, il est vide si $b \notin \operatorname{Im} f$, et de la forme $x_0 + \operatorname{Ker} f = \{x_0 + x \mid x \in \operatorname{Ker} f\}$ si $b \in \operatorname{Im} f$.

§ Exemples d'étude de systèmes d'équations linéaires.

Il convient de valoriser les interventions en géométrie.

Définition d'un hyperplan H de E comme sous-espace vectoriel admettant un supplémentaire de dimension 1 ; caractérisation comme noyau d'une forme linéaire non nulle.

Deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si, et seulement si, elles sont colinéaires.

En dimension finie, équations d'un hyperplan.

d) Trace d'un endomorphisme

Trace d'une matrice carrée ; linéarité de la trace, relations $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$, $\operatorname{Tr} PMP^{-1} = \operatorname{Tr} M$. Trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Le rang d'un projecteur est égal à sa trace.

2- Déterminants

L'objectif de ce chapitre est de consolider les acquis de la classe de première année sur les déterminants en dimension 2 ou 3 et d'étendre la notion de déterminant au cas d'un espace vectoriel de dimension n. Le groupe symétrique et la signature d'une permutation sont hors programme.

Dans ce chapitre, les espaces vectoriels sont de dimension finie sur $\mathbf{K}$.

a) Déterminant de n vecteurs

Formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n. Déterminant de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n. Caractérisation des bases.

La démonstration de l'existence du déterminant n'est pas exigible des étudiants.
Application à l'expression de la solution d'un système de Cramer.

b) Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.

Application à l'orientation d'un espace vectoriel réel de dimension 2 ou 3.

c) Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice.

La preuve de la relation $\det {}^tM = \det M$ est hors programme.

Développement par rapport à une ligne ou une colonne ; cofacteurs. Déterminant d'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

Démonstration non exigible.

Matrices carrées semblables, définition, interprétation en terme de changement de base.

Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.

II. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Cette partie est organisée autour de quatre objectifs :
- Étudier les polynômes d'un endomorphisme u et les sous-espaces stables par u.
- Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres d'un endomorphisme, en dimension finie ou non.
- Étudier les endomorphismes diagonalisables et les endomorphismes trigonalisables, en dimension finie.
- Exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie.

En outre, le programme associe étroitement le point de vue géométrique et le point de vue matriciel.

Dans cette partie, le corps de base $\mathbf{K}$ *est* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$.

1- Sous-espaces stables, polynômes d'un endomorphisme

a) Sous-espaces stables

Définition d'un sous-espace vectoriel F stable par un endomorphisme u d'un espace vectoriel E.
Définition de l'endomorphisme de F induit par u.

Si les endomorphismes u et v commutent, $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.

Si E est de dimension finie, caractérisation des endomorphismes de E stabilisant un sous-espace vectoriel F par leur matrice dans une base de E adaptée à F.

Étant donné un espace vectoriel E de dimension finie et une famille $(E_1, E_2, \dots, E_p)$ de sous-espaces vectoriels dont E est somme directe, caractérisation des endomorphismes stabilisant les sous-espaces E_j par leur matrice dans une base de E adaptée à cette décomposition. Déterminant d'un tel endomorphisme, d'une matrice diagonale par blocs.

Étant donnée une base d'un espace vectoriel E de dimension finie, caractérisation géométrique des endomorphismes dont la matrice dans cette base est diagonale.

b) Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice

La donnée d'un endomorphisme u de E définit un morphisme $P \mapsto P(u)$ de $\mathbf{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$.

Pour tout élément P de $\mathbf{K}[X]$, $\operatorname{Im} P(u)$ et $\operatorname{Ker} P(u)$ sont stables par u.

Polynômes d'une matrice carrée, cas de matrices carrées semblables.

Si P est un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ et A et B deux matrices carrées semblables, les matrices $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables :

$$B = Q^{-1}AQ \implies P(B) = Q^{-1}P(A)Q.$$

2- Réduction d'un endomorphisme

a) Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

Droites stables par un endomorphisme u d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Définition des valeurs propres, des vecteurs propres (le vecteur 0 n'est pas un vecteur propre), des sous-espaces propres $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}\left(u - \lambda \mathrm{I}_E\right)$ d'un endomorphisme u de E.
Si les endomorphismes u et v commutent, les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ sont stables par v.

La notion de valeur spectrale est hors programme.
En dimension finie, λ est une valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda \mathrm{I}_E$ n'est pas inversible ; l'ensemble des valeurs propres de u est alors appelé spectre de u et noté $\operatorname{Sp}(u)$.

Toute famille de p vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est libre.

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est directe.

Étant donnés un endomorphisme u de E et un élément P de $\mathbf{K}[X]$, pour toute valeur propre λ de u, $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$. Si $P(u) = 0$, alors toute valeur propre λ de u est un zéro du polynôme P.

Éléments propres des homothéties, des projecteurs, des affinités, des symétries.

b) Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie. Ordre de multiplicité d'une valeur propre.

Le théorème de Cayley-Hamilton est hors programme.

Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de F induit par u divise le polynôme caractéristique de u.

Expression de la trace et du déterminant lorsque le polynôme caractéristique est scindé.

c) Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

Définition d'un endomorphisme u diagonalisable : l'espace vectoriel E est somme (directe) des sous-espaces propres $E_\lambda(u)$. Inversement, si E est somme directe de sous-espaces vectoriels stables E_j sur lesquels u induit une homothétie, alors u est diagonalisable.

Un endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base formée de vecteurs propres de u, ou encore s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Pour qu'un endomorphisme u de E soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme des dimensions des sous-espaces propres de u soit égale à dim E.

Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines simples est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Pour qu'un endomorphisme u de E soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples. Si u est diagonalisable, pour tout sous-espace vectoriel F de E stable par u, l'endomorphisme de F induit par u l'est aussi.

Trigonalisation d'un endomorphisme u dont le polynôme caractéristique est scindé : il existe une base telle que la matrice associée à u dans cette base soit triangulaire supérieure (théorème admis). Les étudiants n'ont pas à connaître de méthode pour trouver une telle base.

Mis à part les cas élémentaires (endomorphisme d'un espace de dimension 3 ayant deux valeurs propres distinctes par exemple), tout exercice de trigonalisation doit comporter une indication.

3- Réduction des matrices carrées

a) Éléments propres

Définition des valeurs propres, des sous-espaces propres, des vecteurs propres et du spectre d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Les éléments propres de M sont définis comme étant ceux de l'endomorphisme u de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à M.

Polynôme caractéristique.

Deux matrices semblables ont même déterminant, même trace et même polynôme caractéristique.

Un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ peut être considéré comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$; le spectre de M dans $\mathbf{R}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbf{C}$.

b) Réduction

Diagonalisation et trigonalisation des matrices carrées.
Toute matrice carrée dont le polynôme caractéristique est scindé est semblable à une matrice triangulaire supérieure (résultat admis).

Les étudiants n'ont pas à connaître de méthode générale de trigonalisation.

§ Application à l'étude, sur des exemples, du comportement des puissances n-ièmes d'une matrice.

Application à l'étude de suites numériques satisfaisant à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants.

On se limitera aux relations de la forme $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = d$.

§ Exemples d'emploi de décompositions en blocs (produits, matrices diagonales par blocs, triangulaires par blocs).

Pour les produits par blocs, il convient de se limiter aux matrices de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$.

§ Exemples de réduction à la forme diagonale de matrices carrées sur $\mathbf{C}$ ou sur $\mathbf{R}$.

Il convient de donner quelques exemples de matrices non diagonalisables, mais aucune méthode générale de réduction à la forme triangulaire n'est exigible des étudiants.

III. ESPACES EUCLIDIENS, GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Cette partie est organisée autour de quatre objectifs :
- Consolider les acquis de la classe de première année sur le produit scalaire, les espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 et la géométrie euclidienne du plan et de l'espace.
- Étendre ces notions au cas des espaces euclidiens de dimension n ; étudier la réduction des endomorphismes symétriques dans une base orthonormale.
- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs, endomorphismes symétriques, automorphismes orthogonaux) et le point de vue matriciel.
- Exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie.

Il convient d'étudier conjointement les espaces vectoriels euclidiens et la géométrie euclidienne du plan et de l'espace et, dans les deux cas, d'illustrer les notions et les résultats par des figures.

1- Espaces préhilbertiens réels ou complexes

a) Produit scalaire

Produit scalaire sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel ; définition d'un espace préhilbertien réel. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire ; norme et distance associées.
Relation entre produit scalaire et norme, polarisation.

L'étude de ces notions doit être illustrée par de nombreux exemples, notamment le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$ et les produits scalaires usuels sur les espaces de fonctions.

Produit scalaire $(x, y) \mapsto (x|y)$ sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel (linéaire à droite, semi-linéaire à gauche) ; définition d'un espace vectoriel préhilbertien complexe. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire ; norme et distance associées. Relation

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(x|y).$$

L'étude de ces notions doit être illustrée par de nombreux exemples, et notamment :
- le produit scalaire canonique de $\mathbf{C}^n$;
- $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_{[a,b]} \bar{f}g$ dans $\mathcal{C}([a, b])$;
- $(f, g) \mapsto (f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} \bar{f}g$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbf{R}$ à valeurs complexes.

b) Orthogonalité

Vecteurs unitaires. Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal $F^\perp$ d'un sous-espace vectoriel F de E.

Familles orthogonales, familles orthonormales ; relation de Pythagore pour une famille orthogonale finie.

Exemples d'étude et d'emploi de suites de polynômes orthogonaux (aucune connaissance spécifique sur les propriétés des polynômes orthogonaux n'est exigible des étudiants).

Sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux. Somme directe orthogonale d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Projecteurs orthogonaux.

Extension des notions précédentes aux espaces préhilbertiens complexes.

2- Espaces euclidiens

a) Bases orthonormales

Définition d'un espace vectoriel euclidien : c'est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Existence de bases orthonormales, complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale.

Toute forme linéaire f sur un espace vectoriel euclidien E s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = (a|x)$ où a est un vecteur de E.

Expressions dans une base orthonormale des coordonnées et de la norme d'un vecteur, du produit scalaire de deux vecteurs, de la distance de deux points.

b) Projections orthogonales

Dans un espace préhilbertien réel E (de dimension finie ou non), l'orthogonal $F^\perp$ d'un sous-espace vectoriel F de dimension finie est un supplémentaire de ce sous-espace vectoriel, appelé supplémentaire orthogonal de F ; définition de la projection orthogonale $p_F(x)$ d'un vecteur x de E sur F. Lorsque E est de dimension finie,

$$\dim F^\perp + \dim F = \dim E \quad \text{et} \quad F^{\perp\perp} = F.$$

Expression de $p_F(x)$ lorsque F est muni d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$:

$$p_F(x) = \sum_{j=1}^{n} (e_j|x)\, e_j.$$

Définition de la distance $d(x, F)$ d'un élément x de E à F. Expression de cette distance à l'aide de $p_F(x)$: la fonction qui, à tout élément z de F associe $\|x - z\|$ atteint son minimum en un point et un seul, à savoir $p_F(x)$; relation

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2.$$

Inégalité de Bessel :

$$\sum_{j=1}^{n} |(e_j|x)|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Extension des notions précédentes au cas des espaces préhilbertiens complexes.

c) Endomorphismes symétriques, orthogonaux

Dans ce paragraphe, les espaces vectoriels considérés sont des espaces euclidiens.

Définition d'un endomorphisme symétrique u par la relation

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \big(u(x)|y\big) = \big(x|u(y)\big).$$

Caractérisation d'un projecteur orthogonal comme endomorphisme p symétrique tel que $p \circ p = p$.

Les endomorphismes symétriques constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Définition d'un automorphisme orthogonal d'un espace vectoriel euclidien E (c'est-à-dire un automorphisme de E conservant le produit scalaire).

Caractérisation d'un automorphisme orthogonal par la conservation de la norme, par l'image d'une (de toute) base orthonormale.

Définition du groupe orthogonal $O(E)$; symétries orthogonales, réflexions.

L'étude générale du groupe orthogonal est hors programme.

Définition des matrices orthogonales à partir de l'automorphisme de $\mathbf{R}^n$ associé. Définition du groupe orthogonal $O(n)$.

Caractérisation des matrices orthogonales par leurs vecteurs colonnes, par l'une des relations : ${}^tM\,M = I_n$ ou $M\,{}^tM = I_n$.

Caractérisation d'un endomorphisme symétrique, d'un automorphisme orthogonal, à l'aide de la matrice associée dans une (toute) base orthonormale. Changement de base orthonormale.

Déterminant d'une matrice orthogonale, d'un automorphisme orthogonal ; déterminant d'une réflexion.

La notion de rotation ne figure au programme qu'en dimensions 2 et 3.

d) Réduction des endomorphismes symétriques

Si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, alors E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; en particulier, u est diagonalisable dans une base orthonormale.

Diagonalisation d'une matrice symétrique au moyen d'une matrice orthogonale.

Recherche d'une équation réduite d'une conique, d'une quadrique définie par une équation cartésienne dans un repère orthonormal.

ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de suite (ou de série) et de fonction, qui permettent de modéliser le comportement des phénomènes discrets et des phénomènes continus. Les interactions entre le continu et le discret sont mises en valeur.

Le programme se place dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie. Ce cadre permet notamment de décrire et d'étudier les notions de limite et de continuité. Le programme comporte en outre une introduction à la notion de norme en dimension quelconque. Cette notion permet de décrire quelques modes de convergence des suites et des séries de fonctions mais l'étude systématique des espaces vectoriels normés n'est pas un objectif du programme.

La maîtrise du calcul différentiel et intégral à une variable et de ses interventions en géométrie différentielle constitue un objectif essentiel. L'intégration, la représentation des fonctions, notamment par des séries (séries entières, séries de Fourier) et par des intégrales dépendant d'un paramètre, l'approximation des fonctions, les équations différentielles (notamment les systèmes linéaires et les systèmes autonomes, en relation avec la géométrie différentielle) tiennent une place majeure. Le programme comporte en outre une introduction au calcul différentiel à plusieurs variables.

Le programme d'analyse combine l'étude des problèmes qualitatifs avec celle de problèmes quantitatifs. Il développe conjointement l'étude globale des suites et des fonctions et l'étude de leur comportement local ou asymptotique ; en particulier, il convient de mettre en valeur le caractère local des notions de limite, de continuité, de dérivabilité et de différentiabilité. Enfin, pour l'étude des solutions des équations, le programme associe les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact, les méthodes d'approximation et les algorithmes mis en œuvre.

En analyse, les majorations et les encadrements jouent un rôle essentiel. Tout au long de l'année, il convient donc de dégager les méthodes usuelles d'obtention de majorations et de minorations : opérations sur les inégalités, emploi de la valeur absolue, du module ou d'une norme, emploi du calcul différentiel et intégral. Pour comparer des nombres, des suites ou des fonctions, on utilise systématiquement des inégalités larges (qui sont compatibles avec le passage à la limite), en réservant les inégalités strictes aux cas où elles sont indispensables.

En ce qui concerne l'usage des quantificateurs, il convient d'entraîner les étudiants à savoir les employer pour formuler de façon précise certains énoncés et leurs négations. En revanche, il convient d'éviter tout recours systématique aux quantificateurs. A fortiori, *leur emploi abusif (notamment sous forme d'abréviations dans un texte) est exclu.*

Le programme d'analyse et géométrie différentielle comporte l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques relatifs aux suites et aux fonctions, ainsi que l'emploi d'un logiciel de calcul symbolique et formel.

I. SUITES ET FONCTIONS

Cette partie est organisée autour de quatre objectifs :
- Étudier les propriétés fondamentales des espaces vectoriels normés de dimension finie, en vue de fournir un cadre cohérent pour l'étude des suites, des séries et des fonctions.
- Étudier le comportement global et asymptotique d'une suite ou d'une fonction.
- Décrire et mettre en œuvre des algorithmes d'approximation d'un nombre ou d'un vecteur à l'aide de suites ou de séries. Cette étude est menée en relation avec celle des fonctions et de l'algèbre linéaire, et avec les problèmes de mesure de grandeurs géométriques ou physiques.
- Exploiter les résultats de la théorie des fonctions pour l'étude de problèmes numériques (majorations d'expressions, problèmes d'optimisation, solutions d'équations numériques, ...).

1- Normes et distances, suites

Définition d'une norme, notée $x \mapsto \|x\|$ ou $x \mapsto N(x)$, sur un espace vectoriel E réel ou complexe ; distance associée, notée $(x, y) \mapsto d(x, y)$. Boules.
Norme $x \mapsto \|x\| = (x|x)^{1/2}$ associée à un produit scalaire $(x, y) \mapsto (x|y)$ sur un espace vectoriel réel ou complexe.
Suites convergentes, suites divergentes. Opérations algébriques sur les suites convergentes.

Ces notions doivent être illustrées par de nombreux exemples issus de l'espace $\mathbf{K}^n$, des espaces de matrices et de fonctions. Les étudiants doivent connaitre notamment les normes N_2 et N_∞ sur $\mathbf{K}^n$ et sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a, b])$ des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles ou complexes.

Définition d'une application k-lipschitzienne : composée d'applications lipschitziennes.	L'application $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne.
Normes équivalentes ; si N et N' sont équivalentes, toute suite convergeant vers 0 pour l'une converge vers 0 pour l'autre.	Les étudiants doivent savoir comparer notamment les normes usuelles mentionnées ci-dessus.

2- Espaces vectoriels normés de dimension finie

Les applications étudiées dans ce chapitre sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel normé E de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ou sur $\mathbf{C}$ et à valeurs dans un autre espace vectoriel normé F.

Dans un souci d'unification, une propriété portant sur une fonction définie sur A est dite vraie au voisinage d'un point a si elle est vraie sur l'intersection de A avec une boule de centre a lorsque a est un point de E adhérent à A, avec un intervalle $]c, +\infty[$ lorsque $E = \mathbf{R}$ et $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty, c[$ lorsque $E = \mathbf{R}$ et $a = -\infty$.

a) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie

Sur un espace vectoriel de dimension finie E, toutes les normes sont équivalentes.	La démonstration de ce théorème est hors programme.
Définition d'une partie bornée, d'une application bornée.	Espace vectoriel normé $\mathcal{B}(A, F)$ des applications bornées f de A dans F muni de la norme $N_\infty(f) = \sup\limits_{x \in A} \|f(x)\|$.
Pour qu'une suite (u_n) d'éléments d'un espace vectoriel normé E de dimension finie soit convergente, il faut et il suffit que ses coordonnées dans une base de E soient convergentes.	Les coordonnées de la limite sont alors les limites des coordonnées.
Relations de comparaison entre suites : domination et négligeabilité pour une suite (u_n) à valeurs vectorielles et une suite (α_n) à valeurs réelles. Équivalence pour deux suites (u_n) et (v_n) à valeurs réelles ou complexes.	Notations $u_n = O(\alpha_n)$, $u_n = o(\alpha_n)$, $u_n \sim v_n$.

b) Étude locale d'une application, continuité

Définition des parties ouvertes, des parties fermées. Réunion et intersection de parties ouvertes, de parties fermées. Définition d'un point adhérent à une partie.	Les notions de voisinage d'un point, d'adhérence, d'intérieur et de frontière d'une partie, d'ouverts et de fermés relatifs à une partie sont hors programme.
Limite d'une application : soit f une application d'une partie A de E à valeurs dans F et a un point de E adhérent à A. Étant donné un élément b de F, on dit que f admet b comme limite au point a si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout élément x de A, la relation $\|x-a\| \leqslant \delta$ implique la relation $\|f(x)-b\| \leqslant \varepsilon$; le vecteur b est alors unique, et on le note $b = \lim\limits_{a} f$, ou encore $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Lorsqu'un tel élément b existe, on dit que f admet une limite au point a.	Lorsque a appartient à A, f est dite continue au point a ; alors, $b = f(a)$. Dans le cas contraire, f admet une limite en a si et seulement si f se prolonge par continuité en ce point. Dans le cas des fonctions d'une variable réelle, extension de cette définition lorsque $a = +\infty$ ou $a = -\infty$. Dans le cas des fonctions à valeurs réelles, extension aux limites infinies, lorsque $b = +\infty$ ou $b = -\infty$.
Limite d'une application composée ; opérations algébriques sur les limites.	Caractérisation d'une application admettant une limite à l'aide de ses coordonnées dans une base de F.
Limite de l'image d'une suite (u_n) admettant une limite a par une application f admettant une limite au point a.	Caractérisation séquentielle de la continuité d'une application en un point.
Relations de comparaison en un point ; domination et négligeabilité pour une fonction f à valeurs vectorielles et une fonction φ à valeurs réelles ne s'annulant pas en dehors du point.	Notations $f = O(\varphi)$ et $f = o(\varphi)$.

Applications continues. Continuité de la composée de deux applications continues, de la restriction d'une application continue ; opérations algébriques sur les applications continues. Caractérisation de la continuité à l'aide des coordonnées dans une base de F.

Espace vectoriel $\mathcal{C}(A, F)$ des applications continues de A dans F, algèbre $\mathcal{C}(A)$ des fonctions à valeurs réelles ou complexes continues sur A.

Définition d'une partie compacte d'un espace vectoriel de dimension finie : partie fermée bornée de E.

Étant donnée une application continue f de A dans F, l'image par f d'une partie compacte de E incluse dans A est une partie compacte de F. Cas d'une fonction numérique continue sur un compact : existence d'extrémums.

La démonstration de ce théorème est hors programme.

c) Continuité des applications linéaires

Toute application linéaire u d'un espace vectoriel normé (E, N) de dimension finie dans un autre (F, N') est continue sur E.

Il existe un nombre réel $k > 0$ tel que, pour tout x, $N'\big(u(x)\big) \leqslant k\, N(x)$; dans ces conditions, u est k-lipschitzienne.

Si E, F et G sont de dimension finie, toute application bilinéaire B de $E \times F$ dans G est continue sur $E \times F$.

Il convient de mettre en valeur des inégalités du type $\|B(x, y)\| \leqslant k\, \|x\|\, \|y\|$.

Continuité de l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbf{K} \times E$ dans E, du produit scalaire sur un espace euclidien.

Continuité de $(u, v) \mapsto uv$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

3- Suites et séries de nombres réels ou complexes

a) Suites et séries

§ Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et d'emploi d'une telle suite pour l'approximation d'un point fixe a de f.

Pour étudier la vitesse de convergence de u_n vers a, les étudiants doivent savoir exploiter le comportement local de f au voisinage de a et, notamment, une inégalité du type lipschitzien $|f(x) - f(a)| \leqslant k\, |x - a|$ où $0 \leqslant k < 1$, ou du type $|f(x) - f(a)| \leqslant \lambda\, |x - a|^2$.

Série $\sum u_n$ associée à une suite (u_n) de nombres réels ou complexes, suite (s_p) des sommes partielles de cette série.

Il convient de mettre en valeur et d'exploiter la correspondance bijective entre suites et séries.

Définition d'une série convergente et de sa somme, notée $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Espace vectoriel des séries convergentes.

Si la série $\sum u_n$ converge, u_n tend vers 0 ; la réciproque est fausse.

Caractérisation de la convergence d'une série de nombres complexes à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Convergence d'une série réelle alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers zéro ; majoration du reste.

Aucune autre connaissance spécifique sur les séries semi-convergentes n'est exigible des étudiants.

b) Séries de nombres réels positifs

Pour qu'une série $\sum u_n$ de nombres positifs converge, il faut et il suffit que la suite (s_p) des sommes partielles soit majorée. Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_p s_p = \sup_p s_p$.

Convergence des séries géométriques de nombres réels positifs, convergence des séries de Riemann.

Théorème de comparaison des séries de nombres réels positifs : soient (u_n) et (α_n) des suites de nombres réels positifs telles que $u_n = O\,(\alpha_n)$; alors la convergence de $\sum \alpha_n$ implique la convergence de $\sum u_n$.

Comparaison d'une série de nombres réels positifs à une série géométrique (règle de d'Alembert), à une série de Riemann.

c) Séries de nombres réels ou complexes

Séries absolument convergentes (c'est-à-dire telles que $\sum |u_n| < +\infty$).

Toute série absolument convergente est convergente (démonstration non exigible).

En outre, $\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

Série géométrique : la série $\sum z^n$, où z appartient à $\mathbf{C}$, est absolument convergente si, et seulement si, $|z| < 1$; sa somme est alors égale à $\dfrac{1}{1-z}$.

Si $|z| \geqslant 1$, cette série diverge.

Série exponentielle : pour tout nombre complexe z, la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.

Par définition, $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

4- Séries de fonctions

L'étude de la convergence uniforme d'une suite de fonctions et les théorèmes qui la mettent en œuvre sont hors programme. Ainsi, dans ce contexte, l'approximation uniforme des fonctions se traduira en terme de distance uniforme.

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

a) Convergence simple, convergence normale

Étant donnée une suite (f_n) de fonctions définies sur I, définition de la convergence simple sur I.

Définition correspondante pour une série de fonctions $\sum f_n$.

Si elle converge simplement, la série de fonctions a une somme notée $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

Une série $\sum f_n$ de fonctions réelles ou complexes définies sur I est dite normalement convergente sur I si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Pour établir la convergence normale de $\sum f_n$, on peut utiliser une série numérique convergente $\sum \alpha_n$ majorante, c'est-à-dire telle que, pour tout n, $\|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$.

Convergence normale sur tout segment de I.

Si la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur tout segment de I, elle est simplement convergente sur I ; on peut donc définir sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

Si $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, la somme $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ l'est aussi.

Extension de ce résultat au cas où a est une extrémité de I lorsque, pour tout n, f_n admet une limite b_n en a.
La démonstration de ces résultats n'est pas exigible des étudiants.

b) Approximation des fonctions d'une variable réelle

Polynôme de Lagrange d'une fonction f associé à un n-uple de points de I.

Définition d'une fonction φ en escalier sur $[a, b]$, d'une subdivision de $[a, b]$ subordonnée à φ. Espace vectoriel des fonctions en escalier sur un segment.

Espace vectoriel des fonctions en escalier sur $\mathbf{R}$ (par définition, ces fonctions sont nulles en dehors d'un segment).

Définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur un segment.

Une fonction est dite continue par morceaux sur un intervalle quelconque si sa restriction à tout segment est continue par morceaux.

Par définition, on dit qu'une fonction f peut être approchée uniformément par les fonctions appartenant à un certain sous-ensemble A de $\mathcal{F}(I,F)$ si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\varphi \in A$ tel que :

$$\sup_{x\in I} |(f-\varphi)(x)| \leqslant \varepsilon$$

Cela se traduit par le fait qu'à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer $\varphi \in A$ tel que $f-\varphi$ est bornée et $\|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

On rappelle à ce propos que la notion de convergence uniforme d'une suite de fonctions est hors programme.

Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.

Démonstration hors programme.

Approximation uniforme des fonctions continues sur un segment par des fonctions polynomiales. Approximation uniforme sur $\mathbf{R}$ des fonctions continues périodiques par des polynômes trigonométriques (complexes).

La démonstration des théorèmes de Weierstrass est hors programme.

§ Exemples d'obtention et d'emploi d'approximations uniformes de fonctions.

On donnera en particulier des exemples et contre exemples utilisant des polynômes d'interpolation de Lagrange.

II. FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE : DÉRIVATION ET INTÉGRATION

Le programme est organisé autour de quatre objectifs :
- Consolider les acquis de première année concernant la dérivation et l'intégration des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes.
- Étendre ces résultats au cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles.
- Étudier l'intégration et la dérivation des suites et séries de fonctions à valeurs réelles ou complexes.
- Effectuer une étude élémentaire des fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.

Les fonctions étudiées dans cette partie sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ou sur $\mathbf{C}$.

1- Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

a) Dérivée en un point, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition de la dérivabilité d'une fonction f définie sur un intervalle I en un point a de I : dérivée, dérivée à gauche, à droite.

Les étudiants doivent connaître et savoir exploiter l'interprétation cinématique et graphique de la notion de dérivée en un point.

Définition de la dérivabilité d'une fonction f sur un intervalle I, application dérivée ; application de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Notations f', $\mathrm{D}f$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I,F)$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$, linéarité de la dérivation, dérivée d'une application de la forme $u(f)$ où u est une application linéaire, dérivée d'une application de la forme $B(f,g)$, où B est une application bilinéaire.

Lorsque F est un espace préhilbertien, dérivation du produit scalaire $(f|g)$, du carré de la norme $\|f\|_2$; lorsque e est un vecteur unitaire, orthogonalité de e et de $\mathrm{D}e$.

Caractérisation de la dérivabilité d'une fonction f à valeurs dans F à l'aide d'une base de F.

Les coordonnées de $\mathrm{D}f$ sont les dérivées des coordonnées de f.

Cas d'une fonction f à valeurs complexes : pour que f soit de classe $\mathcal{C}^1$, il faut et il suffit que $\bar{f}$ le soit, ou encore que $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le soient.

Dans ces conditions,

$$\mathrm{D}(\bar{f}\,) = \overline{\mathrm{D}f}, \quad \mathrm{D}f = \mathrm{D}(\operatorname{Re} f) + \mathrm{i}\,\mathrm{D}(\operatorname{Im} f).$$

Caractérisation des fonctions constantes parmi les fonctions continues sur I et dérivables sur l'intérieur de I.

b) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I (k entier naturel ou $k=\infty$).

Notations $f^{(k)}$, $\mathrm{D}^k f$, $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.

Espace vectoriel $\mathcal{C}^k(I, F)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans F, où $0 \leqslant k \leqslant \infty$. Algèbre $\mathcal{C}^k(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs réelles ou complexes.

Dérivée k-ième du produit de deux fonctions (formule de Leibniz).

La composée $f \circ \varphi$ d'une application f de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et d'une fonction φ de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle J à valeurs dans I est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J.
Définition d'un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de J sur I ($k \geqslant 1$).

Une fonction φ de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle J ($k \geqslant 1$) est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de J sur $I = \varphi(J)$ si et seulement si, pour tout élément t de J, $\varphi'(t) \neq 0$.

c) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux

Une application f à valeurs dans F est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur un segment $[a, b]$, où $1 \leqslant k \leqslant \infty$, s'il existe une subdivision $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Une fonction f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur un intervalle I quelconque si sa restriction à tout segment est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

Les dérivées successives de f sont définies sur $[a, b]$ privé d'une partie finie ; elles sont notées $D^j f$.
Si f est continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I, f est constante si et seulement si $Df = 0$.

Il convient de mettre en valeur le cas usuel des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $\mathcal{C}^{k+1}$ par morceaux sur I.

2- Intégration sur un segment des fonctions à valeurs vectorielles

Le programme se limite à l'intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment $J = [a, b]$ à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie sur **R** *ou sur* **C**. *La notion de fonction intégrable au sens de Riemann est hors programme.*

a) Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition de l'intégrale d'une application f continue par morceaux sur un segment J. Notations $\displaystyle\int_J f$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f$. Expression de l'intégrale dans une base de F. Linéarité de l'intégrale.

Inégalité $\displaystyle\Big\|\int_J f\Big\| \leqslant \int_J \|f\|$.

Invariance de l'intégrale par translation ; image de l'intégrale par une application linéaire.

Pour une fonction f à valeurs complexes, intégrale de $\bar{f}$, de $\operatorname{Re} f$, de $\operatorname{Im} f$.

Pour les fonctions à valeurs réelles, positivité et croissance de l'intégrale.

Une fonction f continue et à valeurs positives sur un segment $[a, b]$ est nulle si, et seulement si, son intégrale est nulle.

Les intégrales de deux fonctions continues par morceaux coïncidant sauf sur une partie finie de J sont égales.

Additivité de l'intégrale par rapport à l'intervalle d'intégration.

Valeur moyenne d'une fonction. Inégalité de la moyenne

$$\Big\|\int_{[a,b]} f\Big\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\| \leqslant (b-a) \sup_{[a,b]} \|f\|.$$

Démonstration non exigible.

Les étudiants doivent savoir effectuer des majorations analogues pour des intégrales de la forme $\displaystyle\int_{[a,b]} B(f, g)$, où B est une application bilinéaire. En revanche, toute formule ou égalité dite de la moyenne est hors programme.

Étant donnée une application f continue par morceaux sur un intervalle I de **R**, définition de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, où a et b appartiennent à I.

Linéarité. Inégalité de la moyenne. Relation de Chasles.

§ Exemples de méthodes de calcul de valeurs approchées d'intégrales et de comparaison de leurs performances.

La démarche consiste à subdiviser l'intervalle d'intégration et à approcher, sur chaque sous-intervalle, la fonction à intégrer par une fonction polynomiale.

b) Convergence en moyenne quadratique

Produit scalaire $(f,g) \longmapsto \int_{[a,b]} \bar{f}g$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b])$ des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs complexes ; inégalité de Cauchy-Schwarz.

Norme de la convergence en moyenne quadratique :

$$f \longmapsto N_2(f) = \left(\int_{[a,b]} |f|^2\right)^{1/2}.$$

Inégalité $N_2(f) \leqslant \sqrt{b-a}\, N_\infty(f)$.

3- Dérivation et intégration

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle I de **R** *et à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie sur* **R** *ou sur* **C**.

a) Primitives et intégrale d'une fonction continue

Définition d'une primitive g d'une application f continue sur un intervalle I.
Deux primitives d'une même application diffèrent d'une constante.

Extension de cette définition au cas où f est continue par morceaux sur I : g est continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I et, en tout point de continuité de f, $g'(x) = f(x)$.

Théorème fondamental : étant donnés une application f continue sur I et un point a de I,

- L'application $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a ; pour toute primitive h de f sur I,

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = h(x) - h(a).$$

Extension au cas ou f est continue par morceaux sur I.

- Pour toute application f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Extension au cas ou f est continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I.

Formule d'intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Extension aux fonctions continues sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I.

Changement de variable : étant données une fonction f continue sur I à valeurs dans F et une fonction φ à valeurs dans I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Extension au cas où f est continue par morceaux sur I, lorsque φ est strictement monotone sur $[\alpha,\beta]$.

Il convient de mettre en valeur l'intérêt de changements de variable affines, notamment pour exploiter la périodicité et les symétries, ou pour se ramener, par paramétrage du segment $[a,b]$, au cas où l'intervalle d'intégration est $[0,1]$ ou $[-1,1]$.

b) Étude globale des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Inégalité des accroissements finis : soit f une application continue sur $[a,b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$. Si, pour tout élément t de $]a,b[$, $\|f'(t)\| \leqslant \lambda$, alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \lambda\,(b-a).$$

Les étudiants doivent connaitre l'interprétation cinématique de ce résultat.
Extension au cas où f est continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$.

Si f est continue sur $[a,b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b]$ et si f' a une limite finie en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

Extension aux applications de classe $\mathcal{C}^k$: si f est continue sur $[a,b]$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]a,b]$ et si, pour tout $r \in [1,k]$, $\mathrm{D}^r f$ admet une limite en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b]$.

c) Formules de Taylor

Pour une application f de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ par morceaux sur I, formule de Taylor à l'ordre k en un point a de I : expression intégrale du reste R_k. Majoration du reste R_k (inégalité de Taylor-Lagrange).

Décomposition $f(x) = T_k(x) + R_k(x)$, où

$$T_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(x-a)^n}{n!} \mathrm{D}^n f(a).$$

Développement limité d'une primitive d'une application continue ; application au développement limité de la dérivée d'une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Existence d'un développement limité à l'ordre k pour une application de classe $\mathcal{C}^k$: formule de Taylor-Young.

d) Séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Dans ce paragraphe, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

Intégration terme à terme sur un segment d'une série de fonctions continues normalement convergente.

Dérivation terme à terme d'une série de fonctions : soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs réelles ou complexes. Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et si la série $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment de I, alors la somme de la série $\sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\mathrm{D}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{D}\, f_n.$$

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

L'application $e_z : t \mapsto \exp tz$, où z est un nombre complexe, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et $\mathrm{D}e_z = z\, e_z$.

L'application $\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ définit une bijection continue de $]-\pi, \pi[$ sur $\mathbf{U}$ privé de -1, dont l'application réciproque $u \mapsto \operatorname{Arg} u$ est continue.

Relation $\operatorname{Arg} u = 2 \operatorname{Arctg} \dfrac{y}{1+x}$ où $u = x + \mathrm{i}y$, $x^2 + y^2 = 1$, $x \neq -1$.

Exemples d'étude de fonctions définies comme somme d'une série de fonctions (continuité, dérivation, intégration, ...).

4- Intégrales impropres

Pour ce qui concerne les intégrales impropres (ou généralisées), l'objectif du programme est la maîtrise de la convergence absolue de l'intégrale d'une fonction continue à valeurs réelles ou complexes sur un intervalle non fermé ou non borné, en vue de la définition de l'intégration sur un intervalle quelconque. Le programme part de la définition générale de la convergence, en raison de la simplicité de la présentation, mais l'étude de la semi-convergence des intégrales n'est pas un objectif du programme.

a) Définition d'une intégrale impropre convergente

Si f est une application continue par morceaux sur $[a, b[$ l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, par définition, si $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers b, en restant dans $[a, b[$. Cas de l'intervalle $]a, b]$, de l'intervalle $]a, b[$.

On aura soin de distinguer, dans la présentation, le cas où f est une fonction continue par morceaux non bornée sur un intervalle $[a, b[$ borné, et le cas où l'intervalle est non borné (du type $[a, +\infty[$ par exemple).

Définition des intégrales divergentes.

Nature des intégrales :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}, \text{ où } \alpha \in \mathbf{R};$$

$$\int_0^1 \ln t\, dt, \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\, dt \text{ où } \alpha \in \mathbf{R}_+^*.$$

b) Intégrales des fonctions positives

Relations entre la convergence ou la divergence des intégrales de f et de g, dans le cas où $f \leqslant g$, et dans le cas où $f \sim g$.

c) Intégrales absolument convergentes

On dit que f, continue par morceaux sur I, a une intégrale absolument convergente si l'intégrale de la fonction $|f| : t \mapsto |f(t)|$ est convergente.

Une intégrale absolument convergente est convergente.

Résultat admis.

Comparaison en module à des fonctions réelles positives, du type : $|f| \leqslant g$, ou $|f| \sim g$.

5- Intégration sur un intervalle quelconque

a) Définition

Une fonction f, continue par morceaux sur un intervalle I non compact est intégrable sur I si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :
- f admet sur I une intégrale absolument convergente ;
- il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout segment J inclus dans I, on ait :

$$\int_J |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M.$$

La démonstration de l'équivalence des deux propriétés est non exigible.

Si I est un intervalle quelconque et f est intégrable sur I, on appelle intégrale de f sur I et on note $\displaystyle\int_I f$
- si I est un segment, l'intégrale de f sur I
- si I n'est pas un segment, son intégrale impropre sur I.

Brève extension des propriétés vues dans le cadre de l'intégrale sur un segment (linéarité, relation de Chasles, inégalité de la moyenne).

Relation de Chasles : si f est intégrable sur I et sur J, si $I \cup J$ est un intervalle et si $I \cap J$ est vide ou réduit à un point :

$$\int_I f + \int_J f = \int_{I\cup J} f.$$

Changement de variable : étant données une fonction f intégrable sur I et une bijection φ d'un intervalle I' sur I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I',

$$\int_I f = \int_{I'} f \circ \varphi \cdot |\varphi'|.$$

La démonstration de ce théorème est non exigible.

b) Convergence en moyenne quadratique

Les fonctions continues et intégrables sur I à valeurs complexes constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I)$.

Une fonction continue à valeurs complexes f est dite de carré intégrable sur I si $|f|^2$ est intégrable sur I. Ces fonctions constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I)$.

Le produit de deux fonctions continues f et g de carré intégrable sur I est intégrable sur I.

L'application $(f,g) \mapsto (f|g) = \displaystyle\int_I \bar{f}g$ est un produit scalaire ; inégalité de Cauchy-Schwarz, norme de la convergence en moyenne quadratique $f \mapsto N_2(f) = (\displaystyle\int_I |f|^2)^{1/2}$.

Inégalités

$$|(f|g)| \leqslant N_1(fg) \leqslant N_2(f)\,N_2(g);$$

continuité du produit scalaire.

c) Convergence dominée

Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux et intégrables sur I et φ une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur I. Si (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I et si, pour tout entier n, $|f_n| \leqslant \varphi$ (hypothèse de domination), alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f = \lim_n \int_I f_n.$$

La démonstration est hors programme.
Il convient d'insister sur l'importance de l'hypothèse de domination.

d) Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n|$ converge. Alors f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$.

La démonstration de ce théorème est hors programme.

6- Intégrales dépendant d'un paramètre

Les théorèmes qui suivent, dont la démonstration est non exigible, ont pour but de donner aux étudiants des outils pour étudier les fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre.

a) Continuité sous le signe $\int$

Soit I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$ et $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $I \times J$, continue par rapport à x et continue par morceaux par rapport à t telle que pour tout élément x de I, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ soit intégrable sur J. S'il existe une fonction positive φ, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que pour tout élément (x,t) de $I \times J$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ (hypothèse de domination), alors la fonction g définie sur I par la relation $g(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est continue sur I.

Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur toute partie $K \times J$ ou K est un segment contenu dans I.

b) Dérivation sous le signe $\int$ (formule de Leibniz)

Soit I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$ et $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $I \times J$ et dérivable par rapport à x. On suppose que :

- pour tout $x \in I$, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur J ;
- pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue ;
- il existe une fonction positive φ, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que pour tout élément (x,t) de $I \times J$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

On insistera sur la nécessité de la propriété de domination pour $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et

$$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\,(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

III. SÉRIES, SÉRIES ENTIÈRES, SÉRIES DE FOURIER

L'objectif de cette partie est triple :
- Approfondir l'étude des séries de nombres réels ou complexes : comparaison à une intégrale ; applications à l'étude du comportement asymptotique des restes d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente ; produit de Cauchy.
- Étudier les propriétés élémentaires des séries entières et des séries de Fourier.
- Exploiter la représentation des fonctions par des séries entières ou des séries de Fourier pour l'étude de fonctions définies comme solutions d'une équation, en relation avec l'enseignement des autres disciplines scientifiques.

1- Séries de nombres réels ou complexes

a) Comparaison d'une série à une intégrale

Comparaison d'une série de nombres réels positifs à une intégrale : étant donnée une fonction f continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles positives décroissante, la série de terme général

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$$

est convergente. En particulier la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

La relation $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \big(f(t) - f(n)\big)\,\mathrm{d}t$ permet d'encadrer w_n ; un encadrement analogue peut être obtenu lorsque f est croissante.

Équivalent de $n!$ (formule de Stirling).

La démonstration de la formule de Stirling n'est pas exigible des étudiants.

§ Pour une série de nombres réels positifs, exemples d'encadrement du reste d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente ; exemples de recherche de valeurs approchées de la somme d'une série convergente.

Il convient notamment d'exploiter la comparaison d'une série à une intégrale.

Exemples d'étude du comportement asymptotique des restes d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente.

b) Produit de deux séries absolument convergentes

Définition du produit de Cauchy $\sum w_n$ de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de nombres complexes :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p\, v_q.$$

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, $\sum w_n$ l'est aussi (démonstration non exigible des étudiants).

Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\Big).$$

2- Séries entières

Les coefficients des séries entières considérées dans ce paragraphe sont réels ou complexes.

a) Rayon de convergence d'une série entière

Série entière $\sum a_n z^n$ d'une variable complexe z associée à une suite (a_n) de nombres complexes : définition du rayon de convergence R (fini ou non).

Tout résultat général relatif à l'étude de la série sur le cercle $|z| = R$ est hors programme.

Lemme d'Abel : s'il existe un nombre réel $\rho > 0$ tel que $\left(|a_n|\rho^n\right)$ soit borné, alors pour tout nombre complexe z tel que $|z| < \rho$, $|a_n z^n|$ est dominé par $\left(\dfrac{|z|}{\rho}\right)^n$.

La série est absolument convergente sur le disque (ouvert) de convergence. Elle est normalement convergente sur tout compact du disque de convergence ; continuité de la somme sur le disque de convergence.

Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières. Linéarité de la somme, somme du produit de Cauchy.

Relation

$$\exp(z + z') = \exp z \, \exp z'.$$

b) Séries entières d'une variable réelle

Étant donnée une série entière $\sum a_n t^n$ d'une variable réelle t dont le rayon de convergence R est strictement positif, une primitive sur l'intervalle $]-R, R[$ de la somme f de cette série s'obtient en intégrant terme à terme.

Invariance du rayon de convergence d'une série entière par intégration terme à terme, par dérivation terme à terme.

La somme f d'une série entière $\sum a_n t^n$ dont le rayon de convergence R est strictement positif est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. En outre, pour tout $k \geqslant 1$, $\mathrm{D}^k f$ s'obtient par dérivation terme à terme.

En particulier, pour tout entier k positif ou nul, $a_k = \dfrac{1}{k!}\,\mathrm{D}^k f(0)$.

Si de plus la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ converge pour $t = R$ (resp. pour $t = -R$), la somme est continue sur $[0, R]$ (resp. $[-R, 0]$).

Résultat admis.

Définition d'une fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$, où $r > 0$.
Définition de la série de Taylor d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-r, r[$, où $r > 0$.

Développement en série de Taylor par rapport à t de e^{tz} (où z est complexe), de $\sin t$, de $\cos t$. Développement de $\ln(1 + t)$, de $(1 + t)^\alpha$ où α est réel.

3- Séries de Fourier

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont à valeurs complexes, 2π-périodiques et continues par morceaux sur $\mathbf{R}$. Le cas des fonctions T-périodiques s'y ramène par changement de variable.

§ *Il convient d'exploiter l'interprétation en termes d'analyse harmonique des signaux périodiques.*

a) Coefficients de Fourier

Espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes 2π-périodiques continues par morceaux sur $\mathbf{R}$.

Définition d'une fonction 2π-périodique continue par morceaux f à partir d'une fonction g continue par morceaux sur un segment de longueur 2π.

Intégrale sur une période d'une fonction f à valeurs complexes 2π-périodique continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.

Définition des coefficients de Fourier d'une telle fonction :

$$\hat{f}(n) = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t.$$

Expression des coefficients de Fourier sous forme de cosinus et de sinus.

Coefficients de Fourier de $\bar{f}$; cas d'une fonction à valeurs réelles. Coefficients de Fourier de $t \mapsto f(-t)$; cas d'une fonction paire, d'une fonction impaire. Effet d'une translation : coefficients de Fourier de $t \mapsto f(t + a)$.

Définition de la série de Fourier de f : c'est la série de fonctions dont le terme de rang 0 est $c_0(f)$ et dont le terme de rang n est, pour $n > 0$, $c_{-n}(f)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} + c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$. Pour tout entier naturel p, la somme partielle de rang p est donc :

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Lorsque qu'en un point x de $\mathbf{R}$ les sommes partielles $S_p(f)$ convergent, la série de Fourier est convergente au point x et la somme de la série de Fourier en x est alors la limite des sommes $S_p(f)(x)$.

L'application $\mathcal{F}$ qui à f associe $\hat{f}$ est linéaire. La suite $\hat{f}$ est bornée et $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$

Coefficients de Fourier d'une dérivée : si f est 2π-périodique continue sur **R** et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur **R**, alors

$$c_n(\mathrm{D}f) = \mathrm{i}n\, c_n(f).$$

Extension au cas où f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur **R** et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur **R**.

Si f est 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur **R** et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur **R**, alors $c_n(f)$ est négligeable devant $|n|^{-k}$ au voisinage de l'infini.

b) Convergence en moyenne quadratique.

Dans ce paragraphe, on considère des fonctions 2π-périodiques continues sur **R**. *Il convient d'effectuer une brève extension au cas des fonctions continues par morceaux ; les démonstrations concernant cette extension ne sont pas exigibles des étudiants.*

Produit scalaire $(f,g) \mapsto (f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t)\, g(t)\,\mathrm{d}t$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions 2π-périodiques continues sur **R** ; norme associée $f \mapsto \|f\|_2$.

Les fonctions $t \mapsto e_n(t) = \mathrm{e}^{int}$, où n parcourt **Z**, forment une famille orthonormale et, pour tout n, $c_n(f) = (e_n|f)$.

La projection orthogonale d'un élément f de $\mathcal{C}_{2\pi}$ sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_p$ engendré par les e_n, où $|n| \leqslant p$, est la somme partielle $S_p(f)$.
Relation

$$\|f\|^2 = (\|S_p(f)\|_2)^2 + d\,(f, \mathcal{P}_p)^2.$$

En particulier, l'application qui à tout élément P de $\mathcal{P}_p$ associe $\|f - P\|_2$ atteint son minimum en un point et un seul, à savoir $S_p(f)$.

Convergence en moyenne quadratique : pour tout élément f de $\mathcal{C}_{2\pi}$, les sommes partielles $S_p(f)$ convergent en moyenne quadratique vers f.
L'application linéaire $f \mapsto \hat{f}$ est injective.

Formule de Parseval : expressions du carré de la norme et du produit scalaire à l'aide des coefficients de Fourier.

c) Convergence ponctuelle

Convergence normale : lorsque f est 2π-périodique continue sur **R** et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur **R**, les sommes $\displaystyle\sum_{n=-p}^{p} |(c_n(f)|$ sont majorées. Dans ces conditions, la série de Fourier de f converge normalement vers f sur **R**.

En particulier, pour tout nombre réel x, la série de Fourier de f converge en ce point, et sa somme est égale à $f(x)$.

Théorème de Dirichlet : soit f une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur **R**, alors pour tout nombre réel x, la série de Fourier de f converge en ce point et sa somme est égale à $\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\big(f(x+h) + f(x-h)\big)$.

En particulier, en tout point x où f est continue, la somme de la série de Fourier de f est égale à $f(x)$.

La démonstration du théorème de Dirichlet n'est pas exigible des étudiants.

IV. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

L'objectif de cette partie est d'étudier les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants et les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre un ou deux, avec une attention toute particulière aux systèmes autonomes. Cette étude doit être accompagnée d'interprétations géométriques et de représentations graphiques.

Il convient de relier cette étude à l'enseignement des autres disciplines scientifiques (systèmes mécaniques ou électriques gouvernés par une loi d'évolution et une condition initiale, traitement du signal). Il convient d'étudier le comportement du signal de sortie associé à différents types de signaux d'entrée et de dégager la signification de certains paramètres ou comportements : stabilité, régime permanent, oscillation, amortissement, fréquences propres, résonance. On peut alors être amené à étendre la notion de solution (fonction $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$ par morceaux).

Il convient aussi de valoriser l'utilisation des équations ou systèmes différentiels dans la résolution de problèmes de nature géométrique ou cinématique.

1- Équations différentielles linéaires

a) Systèmes linéaires à coefficients constants

Définition d'une solution sur un intervalle I de l'équation différentielle $X' = AX$ où A est une matrice réelle ou complexe.

Existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy.

La démonstration de ce résultat est hors programme.

§ Pratique de la résolution de l'équation $X' = A\,X$, où A est une matrice à éléments réels ou complexes (par réduction de A à une forme diagonale ou triangulaire).

b) Équations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2

Équation $a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)$ où a, b et c sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes.

Structure de l'espace des solutions lorsque a ne s'annule pas sur I.

Étude, sur des exemples, du raccordement de solutions en un point où a s'annule.

Équation $a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = d(t)$ où a, b, c et d sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes.

Lorsque a ne s'annule pas sur I, existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy.

La démonstration de ce résultat est hors programme.

Structure de l'espace des solutions de l'équation homogène, systèmes fondamentaux de solutions, wronskien. Application à la résolution de l'équation par la méthode de variation des constantes.

Expression des solutions dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation homogène associée ne s'annulant pas sur I.

2- Notions sur les équations différentielles non linéaires

En dehors du cas des équations à variables séparables, tout exercice d'intégration d'une équation différentielle non linéaire ou d'un système autonome devra comporter l'indication d'une méthode.

Équations différentielles à variables séparables ; cas particulier des équations incomplètes.

On illustrera la notion de courbe intégrale.

Définition d'un système autonome de deux équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varphi(x,y) \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = \psi(x,y) \end{cases}$$

et de ses trajectoires, dans le cas où φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^2$.

Courbe intégrale d'un champ de vecteurs.

Existence et unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy.

La démonstration de ce théorème est hors programme.

§ Algorithme de recherche de solutions approchées d'une équation différentielle scalaire d'ordre 1 ou d'un système autonome de deux équations d'ordre 1 par la méthode d'Euler.

§ Exemples de construction de courbes intégrales d'une équation différentielle, de trajectoires d'un système autonome de deux équations différentielles d'ordre 1.

On se limitera à des exemples simples, principalement issus de la physique ou des sciences industrielles.

V. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES

L'objectif de cette partie est modeste : consolider les acquis de première année (calcul différentiel portant sur les fonctions numériques de deux variables réelles) ; étendre brièvement ces notions aux applications de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^p$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, où $p \leqslant 3$ et $n \leqslant 3$.

1- Calcul différentiel

L'objectif essentiel est d'étudier quelques notions de base : dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, applications de classe $\mathcal{C}^1$, différentielle, difféomorphismes, gradient, points critiques, dérivées partielles d'ordre supérieur. En revanche, la notion de fonction différentiable est hors programme.

Les applications f considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, où $p \leqslant 3$ et $n \leqslant 3$.

Pour l'étude d'une fonction f de plusieurs variables, il convient de mettre en valeur le fait que la plupart des problèmes peuvent se ramener au problème correspondant pour une fonction d'une variable en paramétrant le segment $[a, a+h]$, ce qui permet d'écrire $f(a+h)-f(a) = \varphi_h(1)-\varphi_h(0)$ où, pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi(t) = f(a+th)$.

a) Applications de classe $\mathcal{C}^1$

Définition de la dérivée de f en un point a de U selon un vecteur h, notée $\mathrm{D}_h f(a)$. Définition des dérivées partielles, notées $\mathrm{D}_j f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout élément $t \in [-\delta, \delta]$, $a + th$ appartienne à U. Si φ_h est dérivable à l'origine, on dit que f admet une dérivée au point a de U selon le vecteur h, et l'on pose $\mathrm{D}_h f(a) = \varphi'_h(0)$.

Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (ou continûment différentiables) sur U : les dérivées partielles $\mathrm{D}_j f$ sont continues sur U.

Théorème fondamental : si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors f est continue sur U et admet, en tout point de U, une dérivée selon tout vecteur h donnée par :

$$\mathrm{D}_h f(a) = \sum_{j=1}^{p} h_j \mathrm{D}_j f(a).$$

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.

En particulier, l'application $h \mapsto \mathrm{D}_h f(a)$ est une application linéaire, appelée différentielle de f au point a et notée $\mathrm{d}f(a)$.

Pour une application de classe $\mathcal{C}^1$, matrice jacobienne ; lorsque $n = p$, jacobien. Si f et g sont deux applications de classe $\mathcal{C}^1$, leur composée $g \circ f$ l'est aussi ; difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^1$. Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$.

Matrice jacobienne d'une application composée ou d'une application réciproque.

Caractérisation d'une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ par ses coordonnées.

Les coordonnées des dérivées partielles sont les dérivées partielles des coordonnées.

Dérivée d'une fonction composée de la forme $f \circ \varphi$, où φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et à valeurs dans U.

Lorsque f est un difféomorphisme, l'image $f(\Gamma)$ d'une courbe paramétrée Γ régulière est une courbe régulière ; détermination d'une tangente à $f(\Gamma)$.

Caractérisation des difféomorphismes parmi les applications injectives de classe $\mathcal{C}^1$.

La démonstration de ce résultat est hors programme.

b) Fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$

Algèbre $\mathcal{C}^1(U)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^p$, le gradient de f est défini par

$$\mathrm{d}f(a)\,(h) = \mathrm{D}_h f(a) = \big(\mathrm{grad} f(a) \;\big|\; h\big).$$

Coordonnées du gradient.

Point critique d'une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$: condition nécessaire d'existence d'un extrémum local.

c) Dérivées partielles d'ordre supérieur

Théorème de Schwarz pour une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur U (avec $k \geqslant 2$).
Algèbre $\mathcal{C}^k(U)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

La démonstration du théorème de Schwarz est hors programme.

d) Équations aux dérivées partielles

Étude d'exemples simples d'équations aux dérivées partielles premières ou secondes.

On exploitera en particulier les techniques de changement de variables.

2- Calcul intégral

Les notions introduites dans ce paragraphe sont étudiées en vue de leur utilisation en sciences physiques (calcul d'aires et de volumes, recherche d'éléments d'inertie d'un solide). Tout développement théorique est exclu. Tous les résultats sont admis. Aucune connaissance sur les intégrales triples n'est exigible en mathématiques.

Intégrales doubles et triples : calcul par intégrations successives, par changement de variables.

Cas particulier des passages en coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques.

Intégrale sur un arc, circulation, formule de Green-Riemann.

Exemples d'applications du calcul intégral à des problèmes issus des sciences physiques.

Aire d'un morceau de surface.

Volume d'un solide.

VI. GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

L'objectif de cette partie est triple :
- Consolider l'étude des courbes planes abordée en classe de première année, tant du point de vue affine (étude locale et asymptotique) que métrique (abscisse curviligne, repère de Frenet, courbure). Aucune connaissance sur l'expression de la courbure en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires n'est exigible des étudiants.
- Exploiter les résultats obtenus sur les fonctions à valeurs vectorielles pour l'étude cinématique et géométrique des courbes de l'espace. Le repère de Frenet, la courbure et la torsion sont hors programme ; il en est de même pour la cinématique du solide, dans le plan ou dans l'espace.
- Exploiter les résultats obtenus sur les fonctions de deux ou trois variables pour la définition et l'étude des surfaces et utiliser les techniques liées aux équations et systèmes différentiels à l'étude des courbes tracées sur une surface.

1- Courbes du plan et de l'espace

La démarche du programme est de partir du point de vue cinématique (donnée d'un paramétrage) et d'introduire ensuite la notion de propriété géométrique en étudiant l'effet d'un changement de paramétrage.

Dans ce chapitre, on considère des fonctions f à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension inférieure ou égale à 3, de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I, où $1 \leqslant k \leqslant \infty$.

a) Courbes paramétrées

Courbes paramétrées (ou arcs paramétrés) de classe $\mathcal{C}^k$.

Interprétation cinématique : mouvement, vitesse, accélération.

Effet d'un changement de paramétrage, paramétrage admissible. Trajectoire d'un mouvement, orientation. Point régulier.

Les changements de paramétrage sont supposés de classe $\mathcal{C}^k$ ainsi que leurs applications réciproques.

b) Étude locale d'un arc orienté Γ de classe $\mathcal{C}^k$

Définition de la tangente en un point A de Γ. Existence d'une tangente en un point régulier.

Dans le cas d'une courbe plane, cas d'un point A où l'un au moins des vecteurs dérivés successifs est non nul.

L'étude locale en un point où tous les vecteurs dérivés successifs sont nuls est hors programme.

c) Étude métrique d'un arc orienté

Dans ce paragraphe, on suppose que F est un espace vectoriel euclidien.

Pour un arc orienté Γ régulier, vecteur unitaire de la tangente. Définition d'une abscisse curviligne : fonction s de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que

$$s' = \|f'\|_2.$$

La longueur d'un arc est définie à l'aide de l'abscisse curviligne. Aucune connaissance spécifique sur une définition géométrique de cette longueur n'est exigible des étudiants.

L'abscisse curviligne est un paramétrage admissible. Paramétrage normal d'un arc.

§ Exemples d'étude de courbes paramétrées du plan ou de l'espace et d'emploi de paramétrages d'ensembles du plan ou de l'espace définis par des conditions géométriques.

À travers l'ensemble du programme d'analyse, il convient d'exploiter le langage de la géométrie différentielle.

Exemples d'emploi d'une base orthonormale mobile pour le calcul de la dérivée d'une fonction vectorielle.

Aucun énoncé général sur la dérivation d'une base orthonormale mobile n'est exigible des étudiants.

Exemples d'étude de propriétés métriques de courbes planes (longueur d'un arc, repère de Frenet, courbure).

2- Courbes et surfaces

Dans ce paragraphe, les courbes et les surfaces sont définies par paramétrages ou par équations cartésiennes. Aucune difficulté ne peut être soulevée sur l'équivalence de ces définitions.
Toutes les formes utiles (pour traiter ce paragraphe) du théorème des fonctions implicites sont admises.

a) Plan tangent à une surface

En un point régulier d'une surface, plan tangent, normale. Tangente à l'intersection de deux surfaces en un point où les plans tangents sont distincts.

b) Surfaces usuelles

Description des cylindres (génératrices, sections droites), des cônes (sommet, génératrices), des surfaces de révolution (axe, méridienne, parallèles). Plans tangents aux surfaces précédentes.

Exemples de description de quadriques à partir de leurs équations réduites en repère orthonormal.

§ Recherche, sur des exemples, de contours apparents cylindriques et coniques.

Exemples de génération de surfaces, de recherche de paramétrages ou de mise en équation dans un repère adéquat.

Exemples d'étude de familles de sections planes d'une surface.

§ Exemples de représentation d'une surface à l'aide de familles de courbes tracées sur la surface.