Introduction aux calculs de limites, équivalents et développements limités

Table des matières

Commençons par quelques exercices annodins...

EXERCICE 1 *Enoncer le théorème de terminale qui parle de* $\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n)$.

EXERCICE 2 *Enoncer précisément le théorème des gendarmes (parfois appelé théorème d'encadrement). On précisera bien à quelle étape (hypothèse ou conclusion) l'existence des limites est requise ou assurée.*

EXERCICE 3 *Avec les outils/techniques de terminale, déterminer* $\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{3n}$.

Indication : mettre sous forme exponentielle. On sait que $\dfrac{\ln(1+x)}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1$ *; on pourra donc faire apparaitre DE FORCE un terme de ce type.*

1 Un peu de théorie

1.1 Rappels sur les limites

- On traitera en parallèle la question des limites de suites ou de fonctions. Dans le premier cas, on a une expression dans laquelle un entier va tendre vers $+\infty$. Dans le second, une variable va tendre vers $\pm\infty$, ou vers un réel en lequel l'expression n'est en général pas définie (typiquement, $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque $x\to 0$).
- On pourra noter $f(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}l$ ou $\lim_{x\to x_0}f(x)=l$. La première se lit "$f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0", et la seconde... ne se lit PAS "la limite de...", mais "$f(x)$ possède une limite qui vaut l, lorsque x tend vers x_0". Il est important de bien comprendre qu'une expression ne possède *a priori* pas de limite.
- On rappelle que si $f(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}l_1$ et $g(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}l_2$, alors $\lambda f(x)+g(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}\lambda l_1+l_2$, et $f(x)g(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}l_1l_2$.
- De même, si $f(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}l$, alors $\mathrm{e}^{f(x)}\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}\mathrm{e}^l$, $\sin\big(f(x)\big)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}\sin(l)$, etc...

  EXERCICE 4 *Formaliser le "etc" en un énoncé court mais précis généralisant les deux résultats précédant concernant* sin *et* exp *(on ne demande pas de preuve).*

- On rappelle enfin les deux résultats suivants, plus ou moins connus en terminale, mais en général mélangés, et pas vraiment compris :

  THÉORÈME 1 (GENDARMES) *Si* $u_n\leq v_n\leq w_n$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *et* $u_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}l$ *et* $w_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}l$*, alors* $v_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}l$.

  THÉORÈME 2 (PASSAGE D'INÉGALITÉS À LA LIMITE) *Si* $u_n\leq v_n$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *et* $u_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}l_1$ *et* $v_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}l_2$*, alors* $l_1\leq l_2$.

  On notera que dans un cas, l'existence d'une limite pour la suite v est dans la *conclusion*, et dans l'autre c'est une *hypothèse*.

1.2 Fausses idées et contre-exemples

- Que dire de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ lorsque $f(x)$ et $g(x)$ tendent tous les deux vers 0 (ou tous les deux vers $+\infty$) en x_0 ? Ben... pas grand chose.

EXERCICE 5 *Montrer différents exemples de fractions* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *telles que* f *et* g *tendent vers* $+\infty$ *lorsque* $x \to +\infty$*, avec le rapport* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *tendant vers* 0, $+\infty$, 10 *lorsque* $x \to +\infty$*, et même un exemple où le rapport* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *ne possède pas de limite en* $+\infty$*.*

– Comment interpréter géométriquement (sur le graphe de f) une limite telle que $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 5$?

EXERCICE 6 *Prouver ou réfuter à l'aide de contre-exemples/dessins les affirmations suivantes :*

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 5 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 5x$$

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 5 \quad \Longrightarrow \quad f(x) - 5x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 5 \quad \Longrightarrow \quad f(x) - 5x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$$

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 5 \quad \Longrightarrow \quad f(x) - 5x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 5 \quad \Longrightarrow \quad f(x) - 5x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

– Chacun sait (?) que si $\alpha \in]-1,1[$, alors $\alpha^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Par ailleurs, si $\beta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, et $K \in \mathbb{R}$, alors $\beta_n^K \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l^K$. Mais...

EXERCICE 7 *Déterminer* $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

1.3 Notions d'équivalent et de négligeabilité

DÉFINITION 1

- On dit que "u_n est *équivalent* à v_n lorsque $n \to +\infty$" (et on note $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ ou bien $u_n \sim v_n$) lorsque $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.
- On dit que "u_n est *négligeable* devant v_n lorsque $n \to +\infty$" (et on note $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$ ou bien $u_n = o(v_n)$) lorsque $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Les définitions suivantes concernent les mêmes notions, mais pour des fonctions au voisinage d'un point :

DÉFINITION 2

Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$, et x_0 un point "au bord de D" (typiquement, 0 ou $+\infty$, si $D =]0, +\infty[$) avec g ne s'annulant pas au voisinage de x_0.

- On dit que "$f(x)$ est équivalent à $g(x)$ lorsque $x \to x_0$" (et on note $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ ou bien $f(x) \sim g(x)$) lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1$.
- On dit que "$f(x)$ est *négligeable* devant $g(x)$ lorsque $x \to x_0$" (et on note $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x))$ ou bien $f(x) = o(g(x))$) lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$.

EXEMPLES 1

1. *On a* $x^2 + 3x \underset{x\to 0}{\sim} 3x$*, mais* $x^2 + 3x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$*.*

2. *De même,* $\sin x \underset{0}{\sim} x$ *alors que* $\sin x \underset{+\infty}{=} o(x)$.
3. *Si on prend* $f(x) = x^2 - x + 3$ *et* $g(x) = x^2 + 2x - 4$, *on a* $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ *mais* $e^{f(x)} \underset{+\infty}{=} o\,(g(x))$.

REMARQUES 1

1. Dire que $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(1)$ est équivalent à dire $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$. De même si $l \neq 0$, $f(x) \sim l$ revient à dire $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l$. Mais *bien entendu*, $f(x) \sim 0$ n'a aucun sens, donc ne se retrouvera jamais[1] sur vos copies...
2. On peut traduire $f(x) \sim g(x)$ par $f(x) = \lambda(x)g(x)$, avec $\lambda(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1$. De même, $f(x) = o\big(g(x)\big)$ pourra se traduire $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$, avec $\varepsilon(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$.

EXERCICE 8 *On suppose* $f(x) \sim 5x$. *Montrer :* $\big(f(x)\big)^{50} \sim (5x)^{50}$. *Si* K *est une constante, a-t-on* $\big(f(x)\big)^K \sim (5x)^K$ *? et* $\big(f(x)\big)^x \sim (5x)^x$ *?*

Les résultats qui suivent sont de preuve simple, *qu'il faut absolument faire*. Ils seront utilisés quinze fois à la seconde. Il ne faut donc pas les APPRENDRE mais les COMPRENDRE et s'y familiariser.

Les énoncés équivalents pour les fonctions au voisinage d'un point sont également valables.

PROPOSITION 1 *Soient* $u, v, w, \ldots$ *des suites réelles.*

- *Si* $u_n \sim v_n$ *et* $v_n \sim w_n$ *alors* $u_n \sim w_n$.
- *Si* $u_n \sim v_n$ *et* $v_n = o(w_n)$ *alors* $u_n = o(w_n)$.
- *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$ *alors* $u_n = o(w_n)$.
- *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *alors* $\lambda u_n = o(v_n)$. *De même, si* $u_n = o(v_n)$ *et* $\mu \in \mathbb{R}^*$, *alors* $u_n = o(\mu v_n)$.
- *Si* $u_n \sim v_n$ *alors* $w_n u_n \sim w_n v_n$ *et de même si* $u_n = o(v_n)$ *alors* $w_n u_n = o(w_n v_n)$. *Par exemple, "*$n^2 o(1/n^3) = o(1/n)$*".*
- *Si* $u_n \sim v_n$ *et* $u'_n \sim v'_n$ *alors* $u_n u'_n \sim v_n v'_n$.
- *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* $u'_n = (v_n)$ *alors* $u_n + u'_n = o(v_n)$.

EXERCICE 9 *Prouver ces résultats.*

EXERCICE 10 *On suppose que* $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, *et* $f(x) \sim g(x)$. *Montrer :* $\ln\big(f(x)\big) \sim \ln\big(g(x)\big)$.

Même chose si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0^+$.

EXERCICE 11 *Montrer qu'au voisinage de* 0, *on a* $x + 3x^2 - 19x^3 \sim x + 600x^2 - 3x^4$. *A quoi de plus simple ces termes sont-ils équivalents ? CONCLUSION ?*

EXERCICE 12 *On prend* $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, $v_n = 1 + \dfrac{2}{n}$, $u'_n = -1 + \dfrac{1}{n^2}$ *et* $v'_n = -1 + \dfrac{2}{n^2}\cdot$ *Vérifier que* $u_n \sim v_n$ *et* $u'_n \sim v'_n$. *Que dire de* $u_n + u'_n$ *vis-à-vis de* $v_n + v'_n$ *? CONCLUSION ?*

1.4 Comparaison des fonctions usuelles en 0 et $+\infty$

EXERCICE 13 *(Calculatrices interdites)*

Tracer sur un même dessin le graphe des fonctions $x \mapsto x, x^2, \sqrt{x}$ *pour* $x \in [0,1]$. *Même chose avec* $\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x^2}$ *et* $-\ln x$ *pour* $x \in]0,1]$.

EXERCICE 14 *Reprendre les 6 fonctions précédentes (prendre* $\ln$ *plutôt que* $-\ln$*), mais avec cette fois* $x \in [1, +\infty[$.

On ne va pas énoncer de théorème ici, mais les résultats qui suivent doivent devenir rapidement intuitifs, si ce n'est pas déjà le cas.

- En 0 : $x^2 = o(x)$, $x^{10} = o(x^2)$, $x = o(1/x^2)$, $1/x^2 = o(1/x^3)$, $\ln x = o(1/x)$, $(\ln x)^{200} = o(1/x)$.
- En $+\infty$: $x = o(x^2)$, $x^2 = o(x^{10})$, $1/x^2 = o(x)$, $1/x^3 = o(1/x^2)$, $\ln x = o(x)$, $(\ln x)^{200} = o(x)$.

[1] aheum...

1.5 Premiers exercices

On demande de traiter les exercices suivants en utilisant impérativement le langage des équivalents et développements limités. On donne pour cela : $\ln(1+x) \sim x$; $\sin x \sim x$, et $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

Exercice 15 *Déterminer* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{3n}$.

Exercice 16 *Trouver un équivalent simple de* $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ *lorsque* x *tend vers* 0.

Exercice 17 *Trouver un équivalent simple de* $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}$ *lorsque* x *tend vers* 0.

2 Calculs effectifs de limites, équivalents et DLs

2.1 Développements limités usuels

Les résultats suivants sont donnés sans preuve, et sont à connaitre le plus rapidement possible.

Proposition 2 *Lorsque* $x, u, v \to 0$, *on a :*

1. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$.
2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$.
3. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$.
4. $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$.
5. *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 + o(u^2)$.
6. $\frac{1}{1-v} = 1 + v + v^2 + o(v^2)$.
7. *Plus accesoirement,* $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$.

Exercice 18 *Prouver le DL de* $(1+u)^5$ *donné plus haut, puis le DL de* $\frac{1}{1-v}$ *à partir de celui de* $(1+u)^{-1}$. *Donner enfin une autre preuve du DL de* $\frac{1}{1-v}$ *en sommant une suite géométrique...*

Exercice 19 *A-ton* $\sin x \sim x - 3x^2 + 19x^4$ *? et* $\sin x - x \sim -3x^2 + 19x^4$ *? CONCLUSIONS ?*

2.2 Quelques idées importantes

1. Dans une somme ou un quotient, on commence par déterminer les limites des différents termes “à vue”. Si tout le monde est d'accord, la limite est trouvée.
2. Pour avoir un équivalent, on détermine rapidement les équivalents des différents termes. Si l'un est plus fort que les autres, on factorise l'équivalent en question, et c'est gagné.
3. Si on cherche le comportement de $f(x)$ pour x proche de $x_0 \in \mathbb{R}$ différent de 0, il peut être intéressant de “poser $x = x_0 + h$”, c'est-à-dire considérer $f(x_0 + h)$, avec cette fois h proche de 0.
4. Dans les développements limités, il faut TOUJOURS respecter la hiérarchie des termes (du plus gros au plus petit). En 0, ça donnera des choses du genre $x + 3x^2 + 2x^5 + o(x^5)$ alors qu'en $+\infty$, on écrira $x^4 + 3x^2 + 4x + o(x)$, mais jamais $x^4 + 3x^2 + 4x + o(x^3)$ (pourquoi ?).

5. Dans une somme $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \pm \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$ avec les deux termes tendant vers $\pm\infty$, on détermine une éventuelle limite ou un équivalent en mettant sous même dénominateur $\dfrac{\cdots}{g_1(x)g_2(x)}\cdot$ On n'est pas formellement obligé de faire ainsi, mais expérimentalement, c'est plus simple comme ça.
6. Si on cherche un équivalent de $\mathrm{e}^{\varphi(x)}$, on commence par chercher un équivalent simple $\varphi(x) \sim \psi(x)$, puis[2] on écrit $\varphi(x) = \psi(x) + truc(x)$, de sorte que $\mathrm{e}^{\varphi(x)} = \mathrm{e}^{\psi(x)}\mathrm{e}^{truc(x)}$, et on recommence avec $truc(x)$, qui est plus petit que $\varphi(x)$. On s'arrête quand on a $truc(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$ (ce qui arrive en une ou deux étapes, en général...), et on a alors $\mathrm{e}^{truc(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1$ donc $\mathrm{e}^{truc(x)} \sim 1$.
7. Pour toute expression de la forme $\big(f(x)\big)^{g(x)}$, on travaillera sur l'écriture $\mathrm{e}^{g(x)\ln(f(x))}$.

2.3 Des limites

Exercice 20 (Mise en route) *Calculer les limites suivantes :*

1. $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{t^t - 1}{1 - t + \ln(1+t)}$;
2. $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{\ln t}{t-1}$;
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^{n^{5/3}}$;
4. $\displaystyle\lim_{t\to 1^+} \frac{t^t - 1}{1 - t + \ln(t)}$ *et* $\displaystyle\lim_{t\to 1^-} \frac{t^t - 1}{1 - t + \ln(t)}$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^x}$;
6. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\frac{\sin x}{\ln(\cos x)}}$;
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\tan x)^{\tan(2x)}$ *(on pourra utiliser l'exercice 10).*

Exercice 21 (Moins direct) *Il faut un peu plus travailler :*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1 - x^x} + \frac{1}{x\ln x}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{cotan}^2 x}$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\tan(2x)}$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan(2x)}$ *(on pourra commencer par montrer :* $\tan(\pi/4 + u) = 1 + 2u + o(u)$ *quand* $u \to 0$*).*

Exercice 22 (Difficile pour des néophytes) *Si vous êtes déjà autonomes sur les calculs suivants... disons que c'est bien parti !*

1. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\ln(\sin^2 x)}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{(\tan x)^x - x^{\tan x}}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 2} (2^x + 3^x - 12)^{\tan(\frac{\pi}{4}x)}$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$.

[2] Bien entendu, $\varphi(x) \sim \psi(x)$ n'implique pas $\mathrm{e}^{\varphi(x)} \sim \mathrm{e}^{\psi(x)}$...

2.4 Des équivalents

EXERCICE 23 *Déterminer des équivalents simples de :*

1. $\ln(\tan x)$ *lorsque* $x \to 0^+$ *puis lorsque* $x \to \dfrac{\pi}{4}$;
2. $\sqrt{x^2+x} - \sqrt[3]{x^3+2x^2}$ *lorsque* $x \to 0^+$ *puis lorsque* $x \to +\infty$;
3. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\tan x}$ *lorsque* $x \to 0$;
4. $e^{1/x} - \dfrac{x(x+1)}{x^2}$ *lorsque* $x \to \infty$;
5. $\sqrt{\ln(2n+1)} - \sqrt{\ln(2n)}$ *lorsque* $n \to \infty$;
6. $\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n - 1$ *lorsque* $n \to \infty$.

EXERCICE 24 *Pareil... mais en plus difficile.*

1. $\left(\dfrac{\ln x}{\ln(x-1)}\right)^{x^2}$ *lorsque* $x \to \infty$;
2. $e^{\sqrt{x^2+x+1}}$ *lorsque* $x \to \infty$;
3. $e^{\tan^2 x}$ *lorsque* $x \to \dfrac{\pi}{2}$;
4. $\dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{\ln^2 n}{2} + \dfrac{\ln^2(n-1)}{2}$ *lorsque* $n \to \infty$;
5. $x^x - (\sin x)^x - \dfrac{x^3}{6}$ *lorsque* $x \to 0$.