Notions de base

EXERCICE 1 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Exprimer par une proposition logique quantifiée le fait que :
- f est croissante ;
- f est strictement croissante ;
- f n'est pas croissante ;
- f n'est pas strictement croissante.

EXERCICE 2 Pour deux ensembles X et Y, montrer l'équivalence :

$$X = Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad X \cup Y = X \cap Y.$$

EXERCICE 3 Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\{2,3\})\big)$.

EXERCICE 4 Comparer $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Même chose avec l'intersection.

EXERCICE 5 f désigne l'application cos (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Déterminer :
- $f(\mathbb{R})$; $f^{-1}(\mathbb{R})$;
- $f([0,\pi/2[)$;
- $f^{-1}(1)$;
- $f^{-1}(]-1,2[)$;
- $f^{-1}\big(f([0,\pi])\big)$.
- $f^{-1}\big(f([0,\pi/2])\big)$.

EXERCICE 6 Soient f une application de E dans F, A une partie de E et B une partie de F. Comparer $f\big(A \cap f^{-1}(B)\big)$ et $f(A) \cap B$.

EXERCICE 7 Discuter l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes :
- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;
- $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (2x+3y, x+2y)$;
- $f_3 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ (x,y) \mapsto 2^x(2y+1)-1$;
- $f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n+1$;
- $f_5 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{sinon} \end{cases}$
- $f_4 \circ f_5$; $f_5 \circ f_4$.

EXERCICE 8 Soit f une application de E dans F. Montrer :
- f est injective si et seulement si pour tout $A \subset E$, $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$;
- f est surjective si et seulement si pour tout $\subset F$, $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$;
- f est injective si et seulement si pour tout $A, B \subset E$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

EXERCICE 9 On suppose $g \circ f$ injective et f surjective. Montrer que g est injective. On précisera d'abord les ensembles de départ et d'arrivée des fonctions ...

EXERCICE 10 On suppose $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives : montrer que f, g et h sont également bijectives (même remarque qu'à l'exercice précédent).

Exercice 11 Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Déterminer l'ensemble des parties X de E telles que $A \cup X = B$.

Exercice 12 Soient E et F deux ensembles non vides, et f une application de E dans F. Montrer que :
- Si f est injective, alors il existe une application g de F dans E telle que $g \circ f = Id_E$.
- Si f est surjective, alors il existe une application g de F dans E telle que $f \circ g = Id_F$.

Exercice 13 (*)

Soient A et B deux parties fixées d'un ensemble E. On considère l'application $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)^2$ définie par :

$$\forall X \subset E, \qquad f(X) = (X \cap A, X \cap B).$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Donner une CNS similaire pour que f soit surjective.

Exercice 14 Soient E, F, G trois ensembles. Comparer $(E \cup F) \times G$ et $(E \times G) \cup (F \times G)$.

Même chose avec l'intersection.

Exercice 15 Soient E et F deux ensembles. Comparer $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$.

Les exercices qui suivent sont moins importants, et un peu plus difficiles que les précédents.

Exercice 16 (*)

X, Y et Z sont trois ensembles (disons non vide...) ; trouver une bijection entre $X^{Y \times Z}$ et $(X^Y)^Z$.

Exercice 17 (*)

Soit X un ensemble. Montrer qu'il n'y a pas de surjection de X dans $\mathcal{P}(X)$. On supposera que φ est une telle surjection, et on considerera l'ensemble des $y \in X$ tels que $y \notin \varphi(y)$.