Mise au point prétaupinale

Table des matières

L'objectif de ce chapitre d'introduction est de se mettre au point sur des techniques censées être connues à l'arrivée en Sup, mais qui posent en général problème. Il est ESSENTIEL de ne pas se contenter de trouver les résultats avec une méthodologie médiocre acquise depuis longtemps, et qui s'effondrera dès que ca se compliquera (bien que vous soyez convaincu du contraire, parfois jusqu'à début Juin...). L'expérience montre qu'il est nécessaire d'IMPOSER d'utiliser un cadre assez rigide, au moins en début d'année. Ainsi, un système linéaire résolu de façon mystérieuse (lire : pas comme moi) ne sera pas pris en compte, même si le résultat est correct ; c'est dit.

Les exemples et exercices sont en bonne partie traités avec Maple dans une feuille annexe.

1 Résolution de systèmes linéaires

1.1 Description de l'ensemble des solutions

Tout d'abord, résoudre un système linéaire, ce n'est pas "trouver la solution" comme dans les petites classes : il existe des problèmes sans solution (faire comprendre à toute une classe de Sup le cours de maths de toute une année dans les moindres détails, par exemple !), d'autres avec plusieurs solutions (trouver une paire de chaussettes dans son armoire le matin), voire une infinité de solution (trouver un entier qui soit un multiple de 2), ou encore un problème pour lequel tout le monde est solution (trouver un réel dont le carré est > -3). Il arrive parfois qu'un problème admette une unique solution, mais il faut bien comprendre que ce n'est pas la rêgle.

En maths, on a l'habitude de décrire les ensembles principalement de deux façons "duales" : on peut décrire un ensemble comme "l'ensemble des machins qui vérifient telle propriété", ou encore comme "l'ensemble des trucs qui ont telle forme".

EXEMPLE 1 *Le segment* $[-1,1]$ *est naturellement défini comme l'ensemble des réels* x *qui vérifient* $-1 \leq x \leq 1$. *Cela dit, si on considère l'ensemble des réels de la forme* $\cos\theta$, *pour* θ *décrivant* $\mathbb{R}$, *on retrouve le même ensemble.* Vous sauriez le prouver ?

Résoudre un système consiste en général à partir d'une question de la forme *"Quels sont les triplets de réels* (x, y, z) *qui vérifient en même temps les trois équations ..."* et arriver à une réponse de la forme :
- Ben y'en a pas.
- Il n'y a que le triplet $(2, -15, 1024)$.
- Ce sont tous les triplets de la forme $(3-\lambda, 2+\lambda, 3\lambda)$, pour λ décrivant $\mathbb{R}$.

Notons que dans le troisième cas, on peut arriver à plusieurs descriptions différentes du même ensemble :

EXERCICE 1 *Montrer :*

$$\begin{aligned}\left\{(3-\lambda, 2+\lambda, 3\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} &= \left\{(3-\mu, 2+\mu, 3\mu) \mid \mu \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{(\alpha, 5-\alpha, 9-3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{(5-\beta, \beta, 3\beta-6) \mid \beta \in \mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

1.2 Des équations bizarres

Comme chacun sait, les notions de TOUJOURS et JAMAIS sont vraiment à distinguer : à la question "a-t-on $x+2 = x+2$?" on répondra "toujours" et à la question "a-t-on $x+2 = x+512$?" on répondra "jamais". Ainsi, un système dans lequel apparaissent les équations $L_1, L_2, ..., L_n$ et l'équation $0 = 0$ est absolument équivalent au système constitué des équations $L_1, L_2, ..., L_n$. Par contre, un système constitué des équations $L_1, L_2, ..., L_n$ et de l'équation $19 = 0$ n'admettra AUCUNE solution. Ainsi, les équations de la forme $\alpha = \beta$ où les inconnues n'interviennent pas sont à prendre avec des pincettes : il faut systématiquement réfléchir (disons les 10 premières fois) avant de les éliminer...

1.3 Existence d'une unique solution

Lors d'une résolution de système, l'équivalence suivante (ou *double-implication*) $\mathcal{S} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases}$ induit la conclusion : "Le système $\mathcal{S}$ admet une unique solution". Mais sauriez-vous préciser quelle implication fournit l'existence d'une solution, et laquelle fournit l'unicité ?

Remarque 1 Prenez votre temps pour répondre à la question précédente : l'expérience montre qu'une réponse trop rapide est correcte statistiquement 35% du temps. Si je pose la même question à mon chat[1], il obtient un meilleur taux de réussite (50%)...

1.4 Systèmes équivalents

On va écrire ici un certain nombre d'implications du type $\mathcal{S}_1 \implies \mathcal{S}_2$, avec $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ des systèmes d'équations (parfois réduits à une seule équation). On demande de réfléchir à la validité des implications inverses $\mathcal{S}_2 \implies \mathcal{S}_1$. Parfois, on utilisera la notation L_1 (L pour ligne) pour désigner une équation. Si L_1 et L_2 sont deux équations $g_1 = d_1$ et $g_2 = d_2$, alors $\alpha L_1 + \beta L_2$ désigne naturellement l'équation $\alpha g_1 + \beta g_2 = \alpha d_1 + \beta d_2$. Il est bien clair (?) que si L_1 et L_2 sont deux équations qui sont vérifiées, alors $\alpha L_1 + \beta L_2$ l'est égalemet.
Attention, il ne s'agit pas de trouver toutes les bonnes réponses très vite : l'objectif est de réfléchir CALMEMENT et LENTEMENT dans chacun des cas...

- $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \implies 2x + y = 11$
- $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + y & = & 11 \\ y & = & 5 \end{cases}$
- $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + y & = & 11 \\ x + y & = & 8 \end{cases}$
- $\begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \implies \alpha L_1 + \beta L_2$
- $\begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \implies \begin{cases} L_1 \\ L_2 + 17 L_1 \end{cases}$
- $\begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \implies \begin{cases} L_1 \\ L_2 + \alpha L_1 \end{cases}$
- $\begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \implies \begin{cases} L_1 \\ \alpha L_2 + L_1 \end{cases}$
- $\begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \implies \begin{cases} L_1 \\ \alpha L_2 + \beta L_1 \end{cases}$

1.5 Le principe du pivot

1.5.1 Systèmes triangulaires

La résolution d'un système triangulaire *à coefficients diagonaux non nuls* se fait sans problème par substitutions successives du bas vers le haut : on garde bien l'équivalence d'après le paragraphe précédent.

[1] un animal remarquable

EXEMPLE 2

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y-3z & = & 2 \\ y-6z & = & -3 \\ z & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y-3z & = & 2 \\ y & = & 6z-3=21 \\ z & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}\big(-2y+3z+2\big)=-14 \\ y & = & 21 \\ z & = & 4 \end{array}\right.$$

et l'ensemble des solutions est réduit à un singleton : $\mathcal{S}=\{(-14,21,4)\}$.

Si le système triangulaire possède des coefficients diagonaux nuls, deux situations peuvent se produire : on peut arriver à l'incompatibilité de deux équations, ou encore à la disparition d'une équation :

EXEMPLE 3

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y-3z & = & 2 \\ -6z & = & -3 \\ z & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y-3z & = & 2 \\ z & = & \frac{3}{6}=\frac{1}{2} \\ z & = & 4 \end{array}\right.$$

et ici ce système n'admet pas de solution : $\mathcal{S}=\emptyset$.

EXEMPLE 4

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y-3z & = & 2 \\ 6z & = & 24 \\ z & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y-3z & = & 2 \\ z & = & \frac{24}{6}=4 \\ z & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}\big(-2y+3z+2\big)=7-y \\ z & = & 4 \end{array}\right.$$

Dans ce dernier système, on voit que pour chaque valeur de y, on peut trouver une (unique) solution de la forme (x,y,z). On a donc "un degré de liberté", et on peut décrire $\mathcal{S}$ comme l'ensemble des triplets de la forme $(7-y,y,4)$, pour y décrivant $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{S}=\big\{(7-y,y,4)\ \big|\ y\in\mathbb{R}\big\}.$$

Attention, lorsqu'on a un système paramétré, on peut être amené à discuter selon la valeur des paramètres, comme on le verra dans les exemples. On peut déjà donner un exemple simplissime :

EXEMPLE 5 *On fixe un réel λ. Résoudre le système d'inconnues x et y :* $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 5 \\ x & = & 2 \\ y & = & \lambda \end{array}\right.$

1.5.2 Mise sous forme triangulaire

Décrivons ce qu'on fait pour un système $(3,3)$ d'inconnues (x,y,z) "lorsque tout se passe bien", en notant L_1, L_2 et L_3 les 3 équations en jeu.
On suppose que le coefficient en x de la première équation, disons a, est non nul. On va s'en servir comme *pivot* pour éliminer les autres occurences de x. Si on note b et c les coefficients en x des deuxième et troisième lignes, le système constitué des équations $L_1, L_2-\frac{b}{a}L_1$, et $L_3-\frac{c}{a}L_1$ est alors équivalent au premier (pourquoi ?) et ne fait apparaître x que dans la première équation : en supposant que le coefficient en y de la nouvelle deuxième ligne L_2', disons d, est non nul (c'est alors le nouveau pivot) et en notant e celui de y dans la

troisième nouvelle ligne L'_3, le système constitué des lignes L_1, L'_2 et $L'_3 - \dfrac{e}{d}L'_2$ est équivalent au premier système et triangulaire : on est ramené à un cas qu'on sait traiter.

Lors de la première étape, on ne touche pas à la première ligne. De même, à la deuxième étape, on ne touche ni à le première ni à la deuxième ligne, etc...

Exemple 6 *Dans l'exemple qui suit, on adopte une notation classique : pour dire qu'on change la seconde ligne L_2 en $L'_2 = L_2 + \alpha L_1$, on préferera noter $L_2 \leftarrow L_2 + \alpha L_1$, ce qui signifie : à partir de maintenant, ce qu'on appelle L_2, c'est ce qui désignait avant $L_2 + \alpha L_1$. Après cinq opérations de ce type, on parlera donc toujours de L_8 plutôt que de L_8''''' :*

$$\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 2 \\ -2x - y - 3z = -5 \\ 6x + 4y + 4z = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2y - 3z = 2 & \\ \quad\ y - 6z = -3 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -2y + 13z = 10 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 2y - 3z = 2 & \\ \quad\ y - 6z = -3 & \\ \quad\quad\ z = 4 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

$$\iff \dots$$

Décrivons maintenant les différents problèmes qui peuvent arriver en cours de résolution d'un système $(3, 3)$, ainsi que leur solution :

- **Pas de pivot où on veut** : si à la première étape le coefficient en x de la première ligne est nul, on peut échanger la première équation avec la deuxième ou la troisième. De même, si à la seconde étape, le coefficient en y (futur pivot) est nul, on peut échanger la deuxième équation avec la troisième, MAIS PAS LA PREMIERE (se souvenir qu'on veut arriver à un système triangulaire : il ne faut pas faire réapparaitre x !).
- **Plus de pivot !** : si il n'y a pas de coefficient en x non nul (rare : x n'apparaît pas dans le système...) on peut prendre y ou z comme première variable. De même, si après la première étape, y n'apparaît ni dans la deuxième ni dans la troisième équation, on peut prendre z comme deuxième inconnue.
- **Un membre de gauche est nul** : voir plus haut : selon que le membre de droite correspondant est nul ou pas, l'équation va disparaître, ou bien rendre le système incompatible.

1.5.3 Résolution générale

En regardant un système linéaire à disons n équations et p inconnues $x_1, ..., x_p$, il est difficile de dire a priori si "ça va bien se passer" au sens où il existera une unique solution. A vrai dire, il est plus simple de détecter certaines situations où on est certain que ça va mal se passer : plus d'inconnues que d'équations ou le contraire, deux équations proportionnelles, etc... Le cours d'algèbre linéaire éclaircira complètement cette question plus tard dans l'année, en faisant intervenir un certain *déterminant* dont certains ont peut-être entendu parler en terminale pour les systèmes $(2, 2)$. Jusqu'à nouvel ordre, il est cependant INTERDIT d'utiliser ces mystérieux déterminants et les formules tout aussi mystérieuses qui vont avec pour résoudre un système $(2, 2)$.

On se lance donc dans une résolution de système sans savoir a priori si on va arriver à un brave singleton comme solution : on essaie de mettre sous forme triangulaire, et en cas de succès, il n'y a plus qu'à remonter le système comme vu plus haut. On peut décrire ce procédé de façon "algorithmique" (terme qui, c'est décidé, ne prendra JAMAIS de "y" en cours d'année...) : il s'agit ici d'un système à n équations et p inconnues $x_1, ..., x_p$. La première équation s'écrit $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1$, et la dernière $a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = y_n$. En cours d'exécution de l'algorithme, L_i désigne toujours la i-ème équation (ou ligne...). Lorsqu'une équation est modifiée, les coefficients $a_{i,j}$ également.

`Pour i allant de 1 jusqu'à n-1 :`

- si tous les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont nuls pour $\alpha \geq i$, le système est sous la forme recherchée : on quitte la boucle ;
- sinon, quitte à échanger eux lignes et/ou deux variables, on peut supposer que $a_{i,i} \neq 0$ (c'est le pivot), et alors pour tout $k \in [\![i + 1, n]\!]$, on remplace L_k par $L_k - \dfrac{a_{k,i}}{a_{i,i}} L_i$.

(On pourrait traduire quasiment littéralement cet algorithme en de nombreux langages de programmation pour obtenir un programme qui résout effectivement les systèmes linéaires. La difficulté principale est de choisir la structure de donnée adéquate)

Si on est confronté à un des problèmes vu plus haut (pas de pivot, disparition d'équation...), les remèdes qu'on a donné nous assurent qu'on peut arriver (quitte à réordonner les inconnues) à un système **équivalent au système initial** de la forme :

$$(\mathcal{T})\left\{\begin{array}{cccccccc}\alpha_1x_1 & + & * & \cdots & \cdots & * & + & \cdots\ * = b_1\\ & & \alpha_2x_2 & + & \cdots & * & + & \cdots\ * = b_2\\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ & & & & & \alpha_rx_r & + & \cdots\ * = b_r\\ & & & & & & & 0 = b_{r+1}\\ & & & & & & & \cdots\\ & & & & & & & 0 = b_n\end{array}\right.$$

avec $\alpha_1, ..., \alpha_r$ tous non nuls[2]. Maintenant :

- s'il existe un $k > r$ telque $b_k \neq 0$, alors le système n'admet pas de solution.
- sinon ($b_{r+1} = \cdots = b_n = 0$), pour chaque valeurs de $x_{r+1}, ..., x_p$, on trouve une unique solution au système en résolvant un système triangulaire (on passe $x_{r+1}, ..., x_n$ dans le membre droit). On obtient donc un ensemble de solution avec $n - r$ paramètres.

1.5.4 Quelques exemples supplémentaires

1. *Tout se passe bien*
   - $\begin{cases}2x + y = 4\\ x - 3y = 9\end{cases}$
   - $\begin{cases}x + y + z = -4\\ 2x - y + 2z = -2\\ -3x + y - z = -2\end{cases}$
   - $\begin{cases}x - y + z - t = -2\\ 2x - 3y + z + t = 1\\ x + y + z + t = 0\\ -x - y + 3z + 2t = -5\end{cases}$
2. *Ça se complique*
   - $\begin{cases}x + y = 2\\ 2x + 2y = 17\end{cases}$
   - $\begin{cases}x + y = 2\\ 2x + 2y = 4\end{cases}$
   - $\begin{cases}x + y + z = 3\\ 2x - y + 4z = 2\\ 4x + y + 6z = 8\end{cases}$
   - $\begin{cases}x + y + z + t = 4\\ -x + y + 2z + t = 2\\ 2x + y + 3z - t = -1\\ y + 4z - t = -3\end{cases}$
   - $\begin{cases}x + y + z + t = 4\\ -x + y + 2z + t = 2\\ 2x + y + 3z - t = -1\\ y + 4z - t = 4\end{cases}$
   - $\begin{cases}x + y - z - t = 2\\ 2x + 3y + z + t = 4\\ 3x + 5y + 3z + 3t = 6\\ 4x + 5y - z - t = 8\end{cases}$

[2] Au fait, sauriez-vous distinguer le concept de “tous non nuls” et celui de “non tous nuls” ?

3. *Il faut discuter :* dans les trois premiers exemples, α est un paramètre réel.
   - $\begin{cases} x + y = 3 \\ \alpha x + 2y = 4 \end{cases}$
   - $\begin{cases} x + y = 3 \\ \alpha x + 2y = 6 \end{cases}$
   - $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + \alpha y - z = 4 \\ x - y + z = 6 \end{cases}$
   - $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + \alpha y - z = 4 \\ x - y - z = 6 \end{cases}$
   - On considère l'application :

$$\Phi \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & \big(x+2y-z+t, x+y+z-3t, x+3y-3z+5t\big) \end{array} \right.$$

   Déterminer les $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\Phi(x,y,z,t) = (0,0,0)$.

4. *Juste pour rire* (extrait de *"Matrices, géométrie, algèbre linéaire"* de P. Gabriel, Ed. Cassini)

   - 9 boisseaux de chanvre, 7 de froment, 3 de haricots, 2 de fèves et 5 de millet coûtent 140 pièces de monnaie ;
   - 7 boisseaux de chanvre, 6 de froment, 4 de haricots, 5 de fèves et 3 de millet coûtent 128 pièces de monnaie ;
   - 3 boisseaux de chanvre, 5 de froment, 7 de haricots, 6 de fèves et 4 de millet coûtent 116 pièces de monnaie ;
   - 2 boisseaux de chanvre, 5 de froment, 3 de haricots, 9 de fèves et 4 de millet coûtent 112 pièces de monnaie ;
   - 1 boisseau de chanvre, 3 de froment, 2 de haricots, 8 de fèves et 5 de millet coûtent 95 pièces de monnaie.

   Combien coûte un boisseau de chaque denrée ? *(Concours d'entrée à l'école mandarinale supérieure T'ai-hsueh de Xi'an, époque Han, 123 avant notre ère !)*

2 Rédiger une récurrence

2.1 Le principe de récurrence

Remarque 2 Supposons qu'Alice tire une carte au hasard (dans un jeu de 32 cartes). Bob peut alors prétendre : "si ta carte n'est pas rouge, alors c'est un pique ou un trèfle". Cette affirmation est correcte, que la carte tirée par Alice soit rouge ou noire. Bref, quand on montre "A implique B", on ne sait toujours pas si A est vérifiée ou non, ainsi que B.

Une propriété qui dépend d'un entier $n \in \mathbb{N}$, disons $P(n)$ peut parfois être montrée directement : on fixe $n \in \mathbb{N}$, et on montre $P(n)$. Parfois, il est plus simple ou naturel de la montrer "de proche en proche" : une preuve par récurrence consiste à montrer que $P(0)$ est vérifiée, puis que pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ impliquera $P(n+1)$.

Le *principe de récurrence* QUI PEUT SE MONTRER dit précisément que si une propriété est vraie au rang 0 et si elle est "hériditaire" (pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $P(n)$ qui implique $P(n+1)$), alors $P(n)$ est effectivement vérifiée pour tout n.

2.2 Un cadre rigide

Une récurrence basique se décompose en 4 temps qu'il convient de bien mettre en valeur lors de la rédaction (il en manque souvent une ou deux, voire trois !) :

- On *énonce* SOIGNEUSEMENT la propriété $P(n)$ qu'on veut montrer. Pour que le correcteur malcomprenant (moi) puisse comprendre sans la moindre ambiguïté, il est demandé de mettre la proposition en question entre guillemets. Typiquement, une proposition $P(n)$ telle que "pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $4n$ est pair" est *parfaitement grotesque* (bien que correcte) dans le cadre d'une preuve par récurrence : une telle proposition NE DEPEND PAS DE n !!! Par contre, la proposition "l'entier $4n$ est pair" dépend effectivement de n, et est donc susceptible d'une preuve par récurrence (!).
  Un truc efficace pour vérifier que la proposition qu'on a énoncée a un sens consiste à la réécrire (au brouillon ou mentalement) pour $n = 10$: si on obtient quelque chose comme "pour tout $10 \in \mathbb{N}$, ..." ou bien "il existe $10 \in \mathbb{N}$ tel que ...", on doit voir (?) que c'est grotesque.
- On *initialise* la récurrence en prouvant $P(0)$. On peut éventuellement montrer $P(1)$ voire $P(2)$ lorsque la proposition a un sens un peu tordu pour $n = 0$, ce qui arrive parfois.
- On prouve que la proposition est *héréditaire* : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $(P(n) \;\Rightarrow\; P(n+1)\;)$. Comme on va le voir un million de fois cette année, pour montrer quelque chose POUR TOUT n, on commence par FIXER un entier n (implicitement, arbitraire : on ne traite pas un exemple particulier $n = 10$), et on essaie de montrer $P(n) \;\Rightarrow\; P(n+1)$: on suppose pour cela $P(n)$, et on essaie de montrer $P(n+1)$. *Notons au passage que pour montrer la même chose, on pourrait supposer $P(n+1)$ non vérifiée, et montrer qu'alors, $P(n)$ ne l'est pas non plus.* Une rédaction type pour cette phase pourra être de la forme :

  Supposons $P(n)$ vérifiée pour un entier $n \in \mathbb{N}$ FIXÉ ; ...... et ainsi on a $P(n+1)$."

  ATTENTION : si on rédige :

  Supposons $P(n)$ vérifiée pour TOUT entier $n \in \mathbb{N}$; ...... et ainsi on a $P(n+1)$."

  cela n'a aucun sens : l'hypothèse se traduit en effet "la proposition est toujours vérifiée". Arriver à une conclusion "$P(n+1)$ est vérifiée" est étrange : d'une part, qui est n ? et d'autre part, ce qu'on conclut est une conséquence directe de l'hypothèse, puisque P est toujours vérifiée...
- On peut alors conclure par une formule du genre "Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que $P(n)$ est vérifiée pur tout $n \in \mathbb{N}$".

La dernière phase manque parfois, ce qui est assez génant : parfois, des preuves de l'hérédité finissent de façon peu claire, et il est difficile de détecter s'il s'agit d'un abandon de la preuve, ou bien d'un manque de lucidité de l'auteur (qui pense avoir terminé), ou encore d'une incompréhension profonde du principe de récurrence (l'auteur pense que montrer $P(n+1)$ pour un n fixé, c'est la même chose que montrer $P(n)$ pour tout n). Si on marque clairement la conclusion, toute ambiguïté saute.

2.3 Quelques exemples

EXERCICE 2 *Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\cdot$*

On peut montrer la formule précédente directement ; c'est un peu plus difficile pour la suivante :

EXERCICE 3 *Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot$*

EXERCICE 4 *Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'entier $10^n - 1$ est divisible par 9 (commencer par donner un sens à la phrase "p est divisible par q").*

EXERCICE 5 *(difficile)*
Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux applications polynômiales P_n et Q_n telles que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos n\theta = \mathbb{P}_n(\cos\theta)$ et $\sin n\theta = \sin\theta Q_n(\cos\theta)$. Attention, une application polynômiale est une application de la forme $x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p$; en particulier, c'est défini sur $\mathbb{R}$, et on devra par exemple être capable de dire ce que vaut $P_{n+1}(10)$...

3 Retrouver rapidement les formules de trigonométrie

3.1 Bien débuter

- Il faut connaitre le graphe des fonctions cosinus, sinus et tangente (un peu plus que “ben ça oscille”) : il faut être capable de tracer rapidement les graphes de ces fonctions sur $[-\pi, 2\pi]$ par exemple.
- Se souvenir que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
- Il faut déjà commencer par oublier ces formules mystérieuses et ineptes de Moivre et Euler. Il est bien plus intelligent de raisonner en terme d'exponentielle complexe : en définissant $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, il faut retenir (admettre) que la fonction exponentielle a les même propriétés que sur $\mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$.
- Ecrire ce que vaut $\mathrm{e}^{-i\theta}$ à côté de la définition de $\mathrm{e}^{i\theta}$ en utilisant les parités de cos et sin : on obtient en faisant la somme et la différence les formules d'Euler (ou Moivre...).
- Puisque $\mathrm{e}^{z_1+z_2\cdots+z_n} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}\ldots\mathrm{e}^{z_n}$, on obtient en prenant les z_k égaux à $i\theta$: $\mathrm{e}^{in\theta} = (\mathrm{e}^{i\theta})^n$, soit encore : $\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$.
- En prenant $z_1 = ia$ et $z_2 = ib$, et en développant chacun des dueux membres de $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$, on retrouve en identifiant[3] les parties réelles et imaginaires :

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b.$$

Remarque 3 En pratique, il est “souhaitable” de retenir ces formules le plus rapidement possible : commencez dès maintenant progressivement le travail de mémorisation.

3.2 Dérouler le formulaire

1. En prenant $a = b$ dans les formules précédentes, on obtient $\cos 2a$ en fonction de $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$. Grâce à la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on obtient une relation entre $\cos 2a$ et $\cos^2 a$ ET RECIPROQUEMENT. Même chose pour $\cos 2a$ et $\sin^2 a$. Bien entendu, en prenant $\theta = 2a$, on obtient $\cos\theta$ en fonction de $\cos\frac{\theta}{2}$ ou $\sin\frac{\theta}{2}$.
2. On écrit $\cos(a-b)$ en dessous de $\cos(a+b)$: par demi-somme et demi-différence, on obtient $\cos a\cos b$ et $\sin a\sin b$. Même principe pour $\sin a\cos b$.
3. Pour obtenir une forme factorisée de $\cos x + \cos y$, on peut voir ce qui précède : $\cos(a+b) + \cos(a-b)$ s'écrit sous forme factorisée, donc il suffit de trouver a et b tels que $a + b = x$ et $a - b = y$: à vous de résoudre ce système... *N.B. : éviter de partir de* $\cos(x+y) + \cos(x-y)$...
4. Pour la tangente, il faut essentiellement se souvenir que... $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, et que $\tan(a+b)$ s'exprime facilement en fonction de $\tan a$ et $\tan b$: écrire $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \cdots$ et voir ce qu'on peut faire comme travail algébrique pour faire intervenir des tangentes. On en déduit directement $\tan 2a$ et $\tan(a-b)$.

3.3 Exercices

Exercice 6 *Sans regarder ce qui précède, se constituer rapidement le formulaire trigo.*

Exercice 7 *Reprendre l'exercice 6*

Exercice 8 *Dans deux jours, reprendre l'exercice 6*

Exercice 9 *Dans une semaine, reprendre l'exercice 6*

Exercice 10 *Dans un mois, reprendre l'exercice 6*

[3] Voir la dernière partie de ce poly à ce sujet

EXERCICE 11 *etc... L'objectif est d'être capable de faire une bonne partie du travail de tête, ce qui demande de l'avoir fait un certain nombre de fois par écrit avant (entre 2 et 20 fois, selon les personnes).*

EXERCICE 12 *On fixe un réel θ et on pose $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ (pour ne pas s'embêter, toutes les tangentes sont définies...).*

1. *Exprimer $\tan\theta$ en fonction de t (que vaut $\tan 2a$?).*
2. *Exprimer $\tan^2 x$ en fonction de $\cos^2 x$, puis le contraire.*
3. *En utilisant la dernière question, exprimer simplement $\sin\theta$ en fonction de t (par exemple en partant de $\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} = \cdots$*
4. *Enfin, exprimer $\cos\theta$ en fonction de t.*

N.B. : Plus tard, ces formules devront être connues...

4 Etudier rapidement une fonction

4.1 Domaines de définition, continuité, dérivabilité

On pourrait dire beaucoup des (souvent débilissimes) “domaine de définition de telle fonction” dont on parle dans tant d'énoncés. En fait, une fonction f est grosso-modo la donnée d'un ensemble de départ E, d'un ensemble d'arrivée F, et d'une façon d'associer à CHAQUE élément x de E un (unique) élément de F, noté $f(x)$. Dans ce cadre, QUI EST LE CADRE EXPLICITE DU PROGRAMME, le domaine de définition de f... est E tout entier. En fait, il serait bien plus judicieux de privilégier une formulation telle que “pour quels x telle expression peut-elle être évaluée, avec les conventions usuelles de calcul ?” Cela dit, comme vous êtes destinés à évoluer dans un monde (hostile) extérieur à ma classe, je reprendrai les formulation habituelles, même si je ne les cautionne pas ! Fin (provisoire) de mon énervement sur la question.

Or donc, face à une “définition de fonction” telle que $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}}$, il faut être capable de dire :

- en quels réels cette fonction est définie.
- en quels points du domaine de définition cette fonction est continue. En général, les “fonctions usuelles” sont continues en tout point où elles sont définie, mais ce n'est pas une rêgle : la fonction “partie entière” est définie sur $\mathbb{R}$, mais est discontinue en tout entier.
- en quel point du domaine de continuité la fonction est dérivable : en pratique, les fonctions usuelles sont dérivables sur leur domaine de définition, sauf les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$, définies et continues en 0, mais non dérivables en ce point. Attention également à $x \mapsto x^a$ en 0...

EXERCICE 13 *Donner les domaines de définition, continuité et dérivabilité des fonctions : $x \mapsto \dfrac{1}{e^{\sin\frac{x}{2}}}$, $x \mapsto \ln(1+\cos x)$, $x \mapsto \tan\sqrt{1+x^2}$ et $x \mapsto x\ln|x|$.*

4.2 Déterminer des limites

Voici les cinq éléments à comprendre pour le calcul des limites :

1. Il faut oublier le grotesque “théorème des fractions rationnelles”, et les astuces bidons de terminale qui marchent une fois sur mille dans la vraie vie (mais 1000 fois sur 1000 au bac). Pour ce qui est des formules mystérieuses du type $\dfrac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ ou $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, on peut s'en passer *dans un premier temps* : il peut être intéressant cependant dès maintenant de réfléchir à leur interprétation géométrique : le rapport $\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$ représente la pente de la droite passant par les points de coordonnées $\big(x_0, f(x_0)\big)$ et $\big(x_0+t, f(x_0+t)\big)$(faire un dessin !). Que se passe-t-il lorsque t tend vers 0 ?
2. Il faut savoir composer des limites : le schéma type est : “On a $f(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} b$ et $g(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} c$, donc $g\big(f(t)\big) \underset{t\to a}{\longrightarrow} c$.”

3. Il faut connaître les fonctions usuelles (qui est plus gros que qui ?) : tracez rapidement (sur un même dessin) le graphe (sur $\mathbb{R}^+$) des fonctions $x \mapsto x^{10}$, $x \mapsto x^{1/4}$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x^2$. On est par ailleurs autorisé à savoir que $x \ln x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
4. Lorsqu'on rencontre un produit (ou un quotient), il faut repérer dans chaque terme celui qui est le plus gros, et le mettre en facteur. Cela nécessite de bien connaître les fonctions classiques...
5. Face à une forme telle que $\big(\alpha(x)\big)^{\beta(x)}$, il faut SYSTEMATIQUEMENT passer à la forme exponentielle $\mathrm{e}^{\beta(x) \ln \alpha(x)}$, sans quoi, vous écoutez votre intuition qui est en général mauvaise pour ce type d'expression.

Plus tard, pour des limites plus tordues, nous aurons besoin de développements limités, mais les règles précédentes vous mèneront déjà assez loin.

Exercice 14 *Déterminer les limites de ...*

- $\dfrac{x^2+1}{4+3x^2+5\sqrt{x}}$ *lorsque x tend vers $+\infty$;*
- $(1+x)e^x$ *lorsque x tend vers $+\infty$, puis $-\infty$.*
- $x^{1/x}$ *lorsque x tend vers 0^+, puis $+\infty$.*
- $(1+x)^{1/x}$ *lorsque x tend vers 0.*
- $\big(1+\dfrac{2}{n}\big)^n$ *lorsque n tend vers $+\infty$.*

4.3 Variations

Si x n'intervient qu'une seule fois dans l'expression de $f(x)$, on peut en général s'en sortir sans dériver (à terme, vous devez pouvoir faire cela oralement et rapidement) :

Exemple 7 *Si $f(x) = e^{x^2}$, on peut noter que f est paire, ce qui ramène l'étude à $\mathbb{R}^+$. Lorsque x croit de 0 à $+\infty$, x^2 en fait autant, donc e^{x^2} croit de $e^0 = 1$ à $+\infty$.*

Exemple 8 *Si $f(x) = \ln(3+\sin x)$, on peut noter que f est définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, ce qui nous ramène à $[0, 2\pi]$. Comme on connait bien (?) la fonction sinus, on va plutôt travailler sur $[-\pi/2, 3\pi/2]$: lorsque x croit de $-\dfrac{\pi}{2}$ à $\dfrac{\pi}{2}$, $\sin x$ croit de -1 à 1, donc $3+\sin x$ croit de 2 à 4, puis $f(x)$ croit de $\ln 2$ à $\ln 4$. Lorsque x croit de $\dfrac{\pi}{2}$ à $\dfrac{3\pi}{2}$, etc...*

Exemple 9 *Si $f(x) = \dfrac{4+x}{3-x}$, on peut noter que $4+x = -(3-x)+7$, de sorte que $f(x) = -1 + \dfrac{7}{3-x}\cdot$ Ainsi, lorsque x croit de $-\infty$ à 3^-, $-x$ décroit de $+\infty$ à -3, puis $3-x$ etc...*

Si on doit dériver, on est prié de faire attention dans son calcul, puis de FACTORISER les résultat (je me fiche de savoir quand la dérivée s'annulle : c'est son signe qui m'intéresse...).

On veillera à distinguer les propositions :

- $f' > 0$ (implicitement : $f'(x) > 0$ pour TOUT x).
- $f'(x) > 0$ (pour l'x dont on est en train de parler).
- $f'(x) \geq 0$.
- f est strictement croissante.
- f est croisante.
- f est strictement croissante sur tel intervalle.

Enfin, on est prié de regrouper les diverses informations dans un tableau de variation.

4.4 Tracer le graphe

Pensez à ces différents points :

- LE BAC EST DERRIERE VOUS. Je me fiche INTEGRALEMENT d'avoir une échelle exacte. En fait, bien souvent, on veut juste l'allure des courbes, et on se fiche des valeurs précises.

- Si vous utilisez une calculatrice graphique, cette dernière ne saura pas sur quel intervalle elle doit faire son graphe (typiquement, Maple utilise systématiquement l'intervalle $[-10, 10]$. Vous devez donc prendre l'habitude de modifier VOUS-MEME l'intervalle des abscisses (en général, la calculatrice fait au mieux pour les ordonnées, quoique...). On pourra par exemple chercher à représenter $x \mapsto (1+x)e^{x^3}$.
- Si on veut une représentation un peu plus précise, on commencera par réfléchir aux x et aux y dont on a besoin (si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs négatives, on évitera de dessiner les axes au milieu du tableau...) et on fera apparaître les tangentes horizontales et asymptotes induites par le tableau de variation.

EXERCICE 15 *Etudier et représenter le graphe de* $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{4+x}\cdot$

5 Et encore...

5.1 Les (mystérieuses) identifications

Signalons dès maintenant que les "on identifie" présents sur vos copies seront observés à la loupe, et que bien souvent, les conséquences après mon passage seront observables de très loin (s'attendre à des "ça ne veut rien dire", "grotesque", ou autres formules nettement moins aimables).
Commençons par un exemple :

- Si on cherche UN couple de réels (x, y) tels que $2x+3y = 2.27+3.19$, il SUFFIT clairement de prendre $x = 27$ et $y = 19$ ("ben alors, on a bien le droit d'identifier !")
- Si on sait que (x, y) est un couple de réels tel que $2x+3y = 2.27+3.19$, on n'a pas NECESSAIREMENT $x = 27$ et $y = 19$ ("ha ben non, on n'a pas le droit d'identifier !").

Finalement, les "identifications" consistent à mettre en relation des propositions telles que $x = y$ et $f(x) = f(y)$. Il est bien évident que pour avoir $f(x) = f(y)$ il est toujours SUFFISANT d'avoir $x = y$, mais par contre, ce n'est pas *a priori* NECESSAIRE.
Donnons une liste (non exhaustive, mais qui regroupe une bonne partie des cas partiques) d'identifications rencontrées sur vos copies :

1. **Les complexes :** Si $a = a'$ et $b = b'$, alors $a + bi = a' + b'i$. Et réciproquement ? si on sait que a, a', b et b' sont réels, alors la relation $a + bi = a' + b'i$ implique bien $a = a'$ et $b = b'$ (c'est une propriété fondamentale des complexes) : on dit qu'on *identifie la partie réelle et la partie imaginaire d'un complexe*. Encore faut-il que a, a', b et b' soient effectivement réels : prendre par exemple $a = -1$,$b = a' = 0$ et $b' = i$!

2. **Les fractions rationnelles :** Soit x est réel différent de -1. Si $a = a'$ et $b = b'$, alors $a + \dfrac{b}{1+x} = a' + \dfrac{b'}{1+x}\cdot$ Et réciproquement ? Le fait d'avoir $a + \dfrac{b}{1+x} = a' + \dfrac{b'}{1+x}$ n'implique certainement pas $a = a'$ et $b = b'$ (prendre $a = 19$, $b = 615$, $a' = 19 + \dfrac{615}{1+x}$ et $b' = 0$). Regardons un problème (légèrement) différent : si $a = a'$ et $b = b'$, alors pour tout réel $z \neq -1$, on a $a + \dfrac{b}{1+z} = a' + \dfrac{b'}{1+z}\cdot$ Réciproquement, si pour tout réel $z \neq -1$, on a $a + \dfrac{b}{1+z} = a' + \dfrac{b'}{1+z}$, alors je prétend que $a = a'$ et $b = b'$ (preuve : en faisant tendre z vers $+\infty$, on obtient $a = a'$, puis avec $z = 1024$, on obtient $b = b'$). Ainsi, le fait qu'une relation soit vérifiée pour un x particulier ou bien pour tout $x \in \mathbb{R}$ va être utilisé de façon très différente.

3. **Les polynômes :** Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$, alors $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$. Et réciproquement ? On peut très bien avoir $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ sans avoir $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$: prendre par exemple $a = b = c = 17$, $a' = 0, b' = 0$ et $c' = 17x^2 + 17x + 17$. Par contre, j'affirme que si $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ POUR TOUT $x \in \mathbb{R}$, alors $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$ (sauriez-vous le montrer ?). On dira ici qu'on peut *identifier les coefficients d'un polynôme*. Ici encore, il est crucial de vérifierla relation non pas pour un seul x mais pour tout x (en fait, une infinité suffit, par

exemple la relation $P(t) = Q(t)$ pour tout $t \in [-1, 1]$ est suffisante pour montrer que deux applications polynômiales P sont égales, mais c'est une autre histoire).

EXERCICE 16 *Trouver deux réels α et β tels que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $2x + 3y = \alpha x + \beta y$.*

EXERCICE 17 *(difficile). Soit $p \in \mathbb{N}$. En utilisant le fait que $\cos(2p\theta)$ est la partie réelle de $e^{2ip\theta}$ donc de $(e^{i\theta})^{2p}$, soit encore $(\cos\theta + i\sin\theta)^{2p}$, montrer qu'il existe une unique application polynômiale P telle que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(2p\theta) = P(\cos\theta)$.*

5.2 L'arithmétique du collège...

Ce paragraphe, ainsi que les deux suivants sont importants en maths, mais les collègues de Physique et Chimie souhaiteraient tout autant que moi que les notions qui y sont préentées soient maîtrisées... et devront constater, navrés, que ce n'est pas sytématiquement le cas...

Il est bien évident que tout le monde rentre en Sup en sachant additionner des fractions, voire même les soustraire, les multiplier, et même les diviser pour les plus habiles. Mais que vous le croyez ou non, une quantité phénoménale de calculs tout-à-fait bien menés échoueront minablement à cause d'erreurs :
- dans les manipulations de fractions (n'espérez pas me surprendre avec des $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$: j'ai vu bien pire dans le passé...) ;
- dans des parenthèses (si votre calcul n'a pas autant de fermantes que d'ouvrantes, méfiance...) ;
- de signe (même en Sup, “moins par moins, ça fait plus”).

EXERCICE 18 *A l'aide de trois intégrations par parties, caluler $\displaystyle\int_0^\pi t^3 \sin t dt$ (on évitera de trouver un résultat négatif ; pourquoi ?).*

5.3 Et celle du lycée

EXERCICE 19 *Chacun sait que a^b, c'est “a fois a fois a ... (b fois)”. Mais que dire (par exemple lorsque $a = 2$, $b = 3$ et $c = 5$) de :*
- *a^{b+c} ;*
- *a^{bc} ;*
- *$a^{(b^c)}$;*
- *$(a^b)^c$.*

Bref, plutôt que de retenir des formules bidons (et un peu fausses de temps en temps), on est prié en cas de moindre doute de revenir à ces exemples (il n'y a JAMAIS de honte à prendre un exemple...). Personnellement, j'éviterai d'utiliser la notation a^{b^c}, mais vous devez savoir que par convention, cela représente $a^{(b^c)}$ et non $(a^b)^c$.

EXERCICE 20 *Que dire de e^{a+b} ? et de e^{ab} ?*

EXERCICE 21 *Que dire de $\ln(a + b)$? et de $\ln(ab)$? Pour quels $a$et b ces expressions ont-elles un sens ?*

EXERCICE 22 *Pour vous, que signifie $(-3)^5$? et $(-3)^{1/2}$? et $z_1^{z_2}$?*

5.4 Dériver vs primitiver

Plutôt que d'être presque au point sur la dérivée ET la primitive de $x \mapsto x^n$, je vous demanderai d'être PARFAITEMENT au point sur la dérivée de $x \mapsto x^n$ (avec la bonne constante). Je vous demanderai *ensuite* d'être capable de retrouver une primitive d'une telle fonction par un raisonnement de la forme “ben c'est à peu près (pour $n \neq -1$) x^{n+1}, mais quand on dérive ce machin, on trouve $(n+1)x^n$, donc si on veut retrouver x^n à l'arrivée, il faut partir de $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\cdot$ C'est certainement bien plus efficace de (presque) connaître par cœur le résultat, mais malheureusement, si vous ne faites pas la vérification en dérivant, l'expérience montre que vous vous trompez régulièrement dans la constante (même une fois sur 4, c'est beaucoup trop...).

De même, je vous demanderai de bien connaître les dérivées des fonctions sin et cos, PUIS d'être capable d'en donner des primitives : si vous voulez retenir quatre résultats plutôt que 2, VOUS N'Y ARRIVEZ PAS.

Enfin, vous devez être capable de dériver des fonctions composées $t \mapsto f\big(g(t)\big)$ (si vous arrivez à les primitiver, vous êtes forts !).

EXERCICE 23 *Donner une primitive de* $t \mapsto \sin(3t+5)$*, et la dérivée de* $t \mapsto 2\cos\dfrac{3}{t^2}\cdot$

EXERCICE 24 *Dériver les fonctions suivantes (après avoir précisé leurs domaines d'existence, de continuité et de dérivabilité) :*

- $x \mapsto \dfrac{1}{e^{\sin x/2}}$ *;*
- $x \mapsto \ln(1+\cos x)$ *;*
- $x \mapsto \tan\big(1+\sqrt{1+x^2}\big)$.

5.5 Large vs strict

Comme chacun sait, qui peut le plus peut le moins... mais la réciproque n'est pas tout-à-fait exacte : si, au lieu de prouver $x \leq y$, vous arrivez à $x < y$, alors vous vous êtes certainement donné du mal pour rien[4], mais au moins ce résultat permet de déduire celui qui était demandé. Si maintenant on vous demande expressement de prouver l'inégalité stricte et que vous avez montré l'inégalité large, ce n'est pas suffisant... On veillera donc tout au cours de l'année à distinguer les notions :

- d'inégalités larges et strictes (quand vous dites "supérieur" et qu'on vous demande avec insistance de préciser, inutile de répéter 15 fois "ben supérieur" : dites si vous parlez d'une inégalité large ou stricte. Même chose pour "positif" : chez les anglo-saxons, ça signifie > 0 et chez nous plutôt ≥ 0. Inutile de laisser l'ambiguïté : il suffit de préciser...) ;
- de monotonie large ou stricte ;
- d'intervalle ouvert $]a,b[$ ou fermé $[a,b]$.

Dans la même lignée brachycérophile, on distinguera les mots "le" et "un" : dire "la solution est $x=2$" n'est pas la même chose que dire "une solution est $x=2$". Si on vous demande UNE solution, la première réponse en dit plus que ce qui est souhaité (ce n'est pas grave, mais encore faut-il justifier l'unicité). Par contre si on demandait LES solutions, la deuxième réponse est insuffisante...

EXERCICE 25 *Etudier (précisément) les variations de* $t \mapsto t+\sin t$ *sur* $[0,2\pi]$.

5.6 Les formules bidons

Certains jugent indispensable de connaître une formule simple pour $\displaystyle\sum_{k=n_1}^{n_2} a_k$, où $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique (ou géométrique) de raison r. Personnellement, je vous demanderai (AVEC INSISTANCE) de savoir :

- que $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;
- vous en servir pour calculer $16+17+18+\cdots+n+(n+1)+(n+2)$.
- que lorsque $x \neq -1$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $1+x+x^2+\cdots+x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (et pas une formule approchante et fausse) ;
- vous en servir pour calculer $x^4+x^5+\cdots+x^n+x^{n+1}+x^{n+2}$ (vous mettez x^4 en facteur, ou bien vous faites la soustraction de deux sommes qui partent de $1+x+\cdots$).

[4] plus probablement : vous avez arnaqué, ou vous avez fait quelques erreurs