Notions de bases

Table des matières

1 Logique

1.1 Proposition logique

Il est exclu de formaliser précisément la notion de "proposition logique". Disons qu'il s'agit d'une affirmation qui peut être vraie ou fausse.

Exercice 1 *Les propositions suivantes sont-elles vérifiées ou non ?*
- $3 > 1$ *;*
- $3 \geq 1$ *;*
- $3 < 1$ *;*
- *en 843, tous ceux dont le nom commence par ZBLORG sont nés entre 1978 et 1985 ;*
- *en 843, tous ceux dont le nom commence par ZBLORG sont nés le 29 février d'une année non bissextile ;*
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x \geq 3 \Rightarrow x \geq 1)$ *;*
- $2 = 0$ *;*
- *une fonction qui n'est pas nulle ne s'annulle pas ;*
- *il existe une fonction qui n'est pas nulle et qui ne s'annulle pas.*

Définition 1
Si P est une proposition, la négation de P, qui est notée non-P ou $\neg P$, prend la valeur "vraie" si P est fausse, et "faux" si P est vraie.

Exercice 2 *En français, la négation de la proposition "tout le monde est présent" est-elle équivalente à "tout le monde est absent" ?*

1.2 Disjonction, conjonction et implication

Définition 2
Soient P et Q deux propositions : on définit trois nouvelles propositions :
- la *disjonction* de P et Q, notée $P \vee Q$, lue "P ou Q" est une proposition qui est vraie si et seulement si **au moins l'une** des deux propositions P et Q est vraie ;
- la *conjonction* de P et Q, notée $P \wedge Q$, lue "P et Q" est une proposition qui est vraie si et seulement si **les deux** propositions P et Q sont vraies ;
- l'*implication* de Q par P, notée $P \Rightarrow Q$, lue "P implique Q" est une proposition qui est vraie si et seulement si P et Q sont vraies, ou si P est fausse.

Remarques 1
- Lorsque P est faux, alors $P \Rightarrow Q$ est toujours vraie : il n'y a pas de troisième valeur booléenne Vrai/Faux/Peut-être !
- On peut résumer les définitions en donnant les "tables de vérité" des opérateurs $\vee$, $\wedge$ et $\Rightarrow$:

P \ Q	V	F
V	V	V
F	V	F

P \ Q	V	F
V	V	F
F	F	F

P \ Q	V	F
V	V	F
F	V	V

Tables de vérité respectives de $P \vee Q$, $P \wedge Q$ et $P \Rightarrow Q$
- le OU mathématique usuel correspond au OU inclusif : si P ET Q sont vérifiées, alors $P \vee Q$ est vraie.
- On vérifiera sans mal que $P \Rightarrow Q$ est équivalent à $\neg P \vee Q$: ou bien on regarde les valeurs de ces deux propositions en fonction de P et Q, ou bien (mieux), on écoute son bon sens : "P implique Q" signifie bien : "P est faux... ou alors Q est vrai".
- De même, $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est **rigoureusement équivalente** à $P \Rightarrow Q$.
- Pour montrer $P \vee Q$, on peut par exemple supposer P faux, et montrer qu'alors Q est vérifiée.
- Pour montrer $P \Rightarrow Q$, on a essentiellement trois possibilités :
  - par le "raisonnement direct" : on suppose P et on montre Q ;

– par la *contraposée* : on suppose Q faux, et on montre que P est faux ;
– par l'*absurde* : on suppose P vrai et Q faux, et on aboutit à une contradiction.
Les deux dernières possibilités sont souvent confondues. Quoi qu'il en soit, il faut toujours préciser ce qu'on suppose (ne pas penser qu'implicitement on a supposé P vérifiée)

Définition 3
Deux propositions P et Q sont dites *équivalentes*, et on note $P \Longleftrightarrow Q$ lorsque $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

La table de vérité de l'équivalence est donc :

P \ Q	V	F
V	V	F
F	F	V

Exercice 3 *Donner la table de vérité du "OU exclusif" : le "OU exclusif" de deux propriétés est une proposiion qui est vérifiée si et seulement si une et une seule des deux propositions est vérifiée.*

1.3 Quantificateurs

Une proposition telle que "$x + y \geq 3$" fait intervenir deux variables x et y. On peut alors la voir comme la proposition $P(x)$, où, à x donné, $P(x)$ est une proposition à une variable.

Lorsqu'une proposition fait intervenir une variable x, on définit deux nouvelles propositions, à partir de *quantificateurs* $\forall$ et $\exists$:

Définition 4
Si $P(x)$ est une proposition dépendant de x, on définit trois nouvelles propositions :
– $\forall x,\ P(x)$, qui se lit "pour tout x, $P(x)$" ou encore "quelque soit x, $P(x)$" est vérifiée si et seulement si $P(x)$ est vérifiée *quelque soit* x ; $\forall$ est le "quantificateur universel".
– $\exists x;\ P(x)$, qui se lit "il existe x tel que $P(x)$" est vérifiée si et seulement si $P(x)$ est vérifiée pour *au moins* un x ; $\exists$ est le "quantificateur existentiel".
– $\exists! x;\ P(x)$, qui se lit "il existe un unique x tel que $P(x)$" est vérifiée si et seulement si $P(x)$ est vérifiée pour *exactement* un x.

Remarques 2
– Pour montrer une proposition de la forme $\exists x;\ P(x)$, il faut EXPLICITEMENT montrer un x tel que $P(x)$ est vérifié. Il ne faut pas se contenter de montrer un vague truc dans lequel le lecteur pourra lui-même vaguement chercher un x vérifiant vaguement $P(x)$...
– De même, pour montrer une proposition de la forme $\forall x,\ P(x)$, il convient de montrer $P(x)$ QUELQUE SOIT x. On FIXE donc (provisoirement) un x (quelconque : il ne s'agit par de prendre $x = 4$, ce qui reviendrait à faire une "preuve par l'exemple"...), et on montre $P(x)$ POUR CET x LA. Il ne s'agit pas de placer des "pour tout x..." en cours de raisonnement : de quel x s'agirait-il ? ? ?
Lorsqu'on a montré $P(x)$ pour l'x qu'on avait fixé, c'est gagné. La relation $\forall x,\ P(x)$ est vérifiée, et on dit parfois qu'on "libère" x, ce qui signifie qu'il n'est plus fixé pour la suite.

Exemple 1 *Dire que $f : E \to \mathbb{R}$ est nulle, c'est dire :*

$$\forall x \in E, \qquad f(x) = 0.$$

Exercice 4 *Comment exprimer le fait qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ s'annulle ? et le fait qu'elle n'est pas nulle ?*

Comme on le voit dans l'exemple suivant, une proposition logique peut très bien inclure plusieurs quantificateurs :

EXEMPLE 2 *La continuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se définit de la façon suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0;\ \forall y \in \mathbb{R}, \qquad \big(|x-y| \leq \alpha \ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon\big)$$

EXERCICE 5 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: montrer que les deux propositions suivantes ne sont pas équivalentes :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}; \qquad f(x) = f(y) \tag{1}$$

$$\exists y \in \mathbb{R};\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = f(y) \tag{2}$$

Montrer cependant que l'une des deux implique l'autre.

Le lecteur est invité à méditer ce qui précède...

1.4 Négation des propositions logiques

PROPOSITION 1 *Soient P et Q deux propositions, dépendant éventuellement d'une variable x :*
- $\neg(\neg P)$ *est équivalente à* P *;*
- $\neg(P \vee Q)$ *est équivalente à* $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ *;*
- $\neg(P \wedge Q)$ *est équivalente à* $(\neg P) \vee (\neg Q)$ *;*
- $\neg(P \Rightarrow Q)$ *est équivalente à* $P \wedge \neg Q$ *;*
- $\neg(\forall x,\ P(x))$ *est équivalente à* $\exists x;\ \neg P(x)$ *;*
- $\neg(\exists x;\ P(x))$ *est équivalente à* $\forall x,\ \neg P(x)$*.*

REMARQUES 3
- Il faut particulièrement s'attarder sur la négation des propositions quantifiées. Il n'est pas question de prouver ce qui est annoncé dans la proposition : en fait, "quand on fait les choses proprement", on définit parfois l'un des deux quantificateurs à partir de l'autre grâce aux relations précédentes ...
- Dans la démonstration *par l'absurde* de $P \Rightarrow Q$, on montre que $P \wedge \neg Q$ est faux, ce qui établit que $\neg(P \wedge \neg Q)$ (c'est-à-dire $\neg P \vee \neg(\neg Q)$, c'est-à-dire $\neg P \vee Q$, c'est-à-dire $P \Rightarrow Q$) est vrai !

EXERCICE 6 *Montrer que l'application "partie entière" n'est pas continue.*

2 Ensembles

2.1 Vocabulaire ensembliste

Là encore, on ne va pas définir ce qu'est un ensemble, mais retenons que c'est un *regroupement d'objets* : les objets qui le composent sont ses *éléments*, et si x est l'un des éléments de E, on note $x \in E$. Deux ensembles sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes éléments

Le lecteur est fortement invité à faire un dessin pour comprendre les définitions suivantes...

DÉFINITION 5
- La *réunion* de deux ensembles E et F, notée $E \cup F$ est l'ensemble constitué des éléments de E **et de** F ;
- l'*intersection* de deux ensembles E et F, notée $E \cap F$ est l'ensemble constitué des éléments **communs** de E et F ;
- E *privé de* F (noté $E \setminus F$) est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F ;
- le *produit cartésien* $E \times F$ est l'ensemble constitué des couples (e, f), où $e \in E$ et $f \in F$;
- on dit que F est inclus dans E, et on note $F \subset E$, si tous les éléments de F sont également des éléments de E
- si $F \subset E$, le "*complémentaire* de F dans E", noté $\complement_E^F$, ou encore $\overline{F}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur E, désigne $E \setminus F$.

Le fait suivant est “naturel”, et découle de la définition de l'égalité de deux ensembles, mais est trop souvent oublié : bien souvent, montrer que deux ensembles sont égaux conduit à un massacre...

FAIT 1 Principe de la double inclusion
Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

EXERCICE 7 *Montrer les relations suivantes (A et B sont deux ensembles) :*
- $\overline{(\overline{A})} = A$;
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *et* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

DÉFINITION 6
Soit I un ensemble (d'*indices*) et $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles indexée par I : la réunion (resp. l'intersection) des E_i, notée $\bigcup_{i \in I} E_i$ (resp. $\bigcap_{i \in I} E_i$) désigne l'ensemble E tel que $x \in E$ si et seulement s'il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in E_{i_0}$ (resp. pour tout $i \in I$, $x \in E_i$).

EXERCICE 8 *Déterminer* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [1/n, 1515 - 1/n]$ *et* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-1/n, 1515 + 1/n[$.

SOLUTION : ON COMMENCE PAR FAIRE UN DESSIN, en représentant les premiers intervalles en jeu, et on se pose la question : quels sont les $x \in \mathbb{R}$ qui appartiennent à L'UN des intervalles $[1/n, 1515 - 1/n]$? (pas seulement l'un des 2 premiers, ou l'un des n premiers...). On montrera que la réunion recherchée est $]0, 1515[$. Pour l'intersection, on trouvera $[0, 1515]$.

2.2 Ensemble des parties d'un ensemble

DÉFINITION 7
Une *partie* d'un ensemble E est un ensemble F inclus dans E. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble constitué des parties de E.

On a bien noté que les *éléments* de $\mathcal{P}(E)$ sont des *ensembles*. Par exemple, l'ensemble vide $\emptyset$ est toujours dans $\mathcal{P}(E)$. Un autre élément remarquable de $\mathcal{P}(E)$ est E. On dit que $\emptyset$ et E sont des parties *triviales* de E.

EXEMPLE 3 *Si* $E = \{\diamond, \nabla\}$, *alors* $\mathcal{P}(E) = \big\{\emptyset, \{\diamond\}, \{\nabla\}, E\big\}$.

EXERCICE 9 *Lesquelles des propositions suivantes sont exactes ?*
- $3 \in \mathbb{R}$;
- $\{3\} \in \mathbb{R}$;
- $3 \subset \mathbb{R}$;
- $\{3\} \subset \mathbb{R}$;
- $3 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$;
- $\{3\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$;
- $3 \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$;
- $\{3\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$;

EXERCICE 10 *Donner un élément non trivial e de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, et une partie non triviale de e.*

3 Fonctions

3.1 Définition

Une fonction f est la donnée de deux ensembles E et F, et d'une partie Γ de $E \times F$ (le *graphe* de f) telle que pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$; on note alors $y = f(x)$, et on dit que y est l'*image* de x par f, et que x est **un** *antécédent* de y par f.

Cette définition est à oublier rapidement... à l'exception du fait que les ensembles de départ (E) et d'arrivée (F) sont attachés à la fonction : inutile d'essayer de montrer telle ou telle propriété sur f tant que ces ensembles ne sont pas clairement identifiés...

Pour prouver que deux fonctions f et g sont égales, il faut en particulier vérifier que $f(x) = g(x)$ **pour tout** $x \in E$.

On note F^E l'ensemble des applications de E dans F (**attention à l'ordre**). Par exemple, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les suites réelles !

Enfin, on rappelle que si f est une application de E dans F et g une application de F dans G, alors on définit une application *composée*, notée $g \circ f$, de E dans G, telle que si $x \in E$, alors $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

3.2 Injections, surjections, bijections

DÉFINITION 8

Soit f une application de E dans F. On dit que f est :

- *injective* si tout élément de F admet *au plus* un antécédent par f ;
- *surjective* si tout élément de F admet *au moins* un antécédent par f ;
- *bijective* tout élément de F admet *exactement* un antécédent par f.

On peut reformuler cela en terme de quantificateurs (s'arrêter sur l'injectivité) :

FAIT 2 *Soit f une application de E dans F. Alors f est :*

- *injective ssi :* $\forall x, y \in E, \quad f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y$ *;*
- *surjective ssi :* $\forall y \in F,\ \exists x \in E; \quad f(x) = y$ *;*
- *bijective ssi :* $\forall y \in F,\ \exists! x \in E; \quad f(x) = y$*.*

REMARQUES 4

- Pour montrer que f est injective, il faut montrer que si $x \neq y$, alors $f(x) \neq f(y)$, ou bien que si $f(x) = f(y)$, alors $x = y$. Tout raisonnement de la forme "supposons $x = y\dots$ donc $f(x) = f(y)$, donc f est injective" rapportera "*quelques ennuis*" à son auteur.
- Pour montrer que f n'est pas injective, il faut **trouver** $x \neq y$ tels que $f(x) = f(y)$.
- Pour montrer que f est surjective, il faut **fixer** $y \in F$, puis **trouver** $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Tout raisonnement se ramenant à "tiens, j'ai trouvé un $x \in E$ et un $y \in F$ tels que $f(x) = y$, donc f est surjective" est à proscrire ...

Les résultats suivants sont l'occasion de faire les premières véritables preuves "quantifiées" de l'année :

PROPOSITION 2 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions :*

- *Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ aussi ;*
- *si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ aussi ;*
- *si $g \circ f$ est injective, alors f aussi ;*
- *si $g \circ f$ est surjective, alors g aussi.*

PREUVE : A faire soigneusement. Dans chaque cas, on trouvera un contre-exemple pour l'implication réciproque. ■

3.3 Fonctions inversibles

Supposons $f : E \to F$ bijective. Tout élément y de F possède un unique antécédent $x \in E$ par f. On peut ainsi définir une application $g : F \to E$ qui à $y \in F$ associe son antécédent par f. Il est alors simple de vérifier que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ (faire tout de même les deux vérifications, la seconde demandant une petite précaution). L'application g s'appelle la *bijection réciproque* de f, et est souvent notée f^{-1}.

DÉFINITION 9

Une fonction $f : E \to F$ est dite *inversible* s'il existe une fonction $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.

Exercice 11 *Quelle est la question naturelle qui se pose maintenant ?*

Proposition 3 *Une fonction est bijective si et seulement si elle est inversible.*

Preuve : Le sens "bijectif $\Rightarrow$ inversible" a été vu plus haut. Pour la réciproque, supposons f inversible. On peut utiliser la proposition 2 pour montrer que f est injective et surjective, ou bien fixer $y \in F$, et montrer que $x \in E$ vérifie $f(x) = y$ SI ET SEULEMENT SI $x = g(y)$. On a alors existence et unicité d'un antécédent à y par f (détailler...). ■

Remarque 5 On verra en exercice que dans le sens "inversible implique bijective", il faut absolument avoir les *deux* relations $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.

En exercice également, on verra deux résultats plus fins, détaillant ce qui se passe à droite et à gauche vis à vis de l'injectivité et de la surjectivité.

Proposition 4 *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f : E \to G$ également, avec de plus $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (attention à l'ordre !)*

Preuve : A faire soigneusement...

Plusieurs points de vue sont possibles. On peut par exemple COMMENCER par montrer que $g \circ f$ est bijective à l'aide de la proposition 2, puis considérer $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})$.

Un autre point de vue peut être de considérer $h = f^{-1} \circ g^{-1}$, montrer $(f \circ g) \circ h = \mathrm{Id}_G$ et $h \circ (f \circ g) = \mathrm{Id}_E$, et utiliser la proposition 3. ■

3.4 Images directe et réciproque

Définition 10

Soit f une application de E dans F.
- Si $A \subset E$, l'image *directe* de A par f, notée $f(A)$, est l'ensemble constitué des $f(x)$, pour $x \in A$.
- Si $B \subset E$, l'image *réciproque* de B par f, notée $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des $x \in E$ qui *vérifient* $f(x) \in B$.

Remarques 6
- $f(A)$ est donc une partie de F et $f^{-1}(B)$ est une partie de E.
- Pour montrer que $y \in f(A)$, il faut donc **trouver** $x \in A$ tel que $f(x) = y$, alors que pour montrer que $x \in f^{-1}(B)$, il faut **vérifier** que $f(x) \in B$: il faut bien distinguer ces deux types de preuve. Il est donc ILLUSOIRE d'essayer de rédiger de la même façon les preuves concernant les images directes et réciproques.
- "Vérifions qu'il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $8 = x$ et x est pair" est une reformulation EXACTE et GROTESQUE de "vérifions que 8 est pair". De même, BIEN ENTENDU, il ne viendrait l'idée à personne, pour montrer $x \in f^{-1}(B)$, de dire "vérifions qu'il existe $y \in B$ tel que $f(x) = y$"...
- De même, BIEN ENTENDU, on n'écrira jamais "$x = f^{-1}(y)$ pour un certain $y \in B$" pour exprimer ou prouver le fait que x est dans $f^{-1}(B)$: **en général, f^{-1} ne désigne pas une application**.
- Cependant, si f est inversible, l'image réciproque de B par f coïncide avec l'image directe de B par l'application f^{-1} (le prouver...) : la notation (a priori ambigûe) $f^{-1}(B)$ est donc univoque.
- $f^{-1}(\{x\})$ désigne donc l'ensemble (éventuellement vide) des antécédents de x. On le notera souvent $f^{-1}(x)$.

L'exercice suivant est tout-à-fait fondamental : il faut savoir le faire, PUIS savoir le faire *rapidement* et à encéphalogramme (quasiment) plat.

Exercice 12 *f est ici une application de E dans F. On établira chacune des relations suivantes, en indiquant d'abord "où sont les ensembles considérés". Dans les cas de simple inclusion, on montrera des exemples où l'inclusion réciproque n'est pas vérifiée.*

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ *et* $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

2. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ *et* $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ *;*

3. $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$ *et* $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$ *;*

4. $A_1 \subset A_2 \ \Rightarrow\ f(A_1) \subset f(A_2)$*, et* $B_1 \subset B_2 \ \Rightarrow\ f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$*.*

3.5 Restrictions et prolongement

Définition 11

Soit f une application de E dans F

- Si $E_1 \subset E$, la *restriction* de f à E_1 est l'application g de E_1 dans F, notée $f|_{E_1}$ telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in E_1$ (seul l'ensemble de départ change).
- Si $F_1 \subset f(E)$, la *corestriction* de f à F_1 est l'application h de E dans F_1, notée $f|^{F_1}$ qui à $x \in E$ associe $f(x)$ (qui est bien dans $F_1\ldots$).
- Si g est une restriction de f, on dit que f est un *prolongement* de g.

Exemple 4 *L'application* cos *(de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*) n'est ni injective ni surjective. Par contre,* $\cos|_{[0,\pi]}^{[-1,1]}$ *est bijective.*

4 Exercice : les fonctions indicatrices

Cette partie constitue un exercice tout à fait essentiel, non par les résultats qu'il établit, mais par les techniques élémentaires qu'il utilise ; il est nécessaire (et quasi suffisant) de bien savoir, en permanence, de quel objet on parle : élément de E, partie, fonction...

E désigne ici un ensemble (non vide...) fixé une fois pour toute.

4.1 Fonction indicatrice d'une partie

Définition 12

Si A est une partie de E, on définit la *fonction indicatrice* de A, qui est une application de E dans $\{0, 1\}$, notée χ_A, telle que :

$$\forall x \in E, \qquad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 13 *Que dire de* $\chi_\emptyset$ *et* χ_E *?*

Exercice 14 *Démontrer les relations suivantes, valables pour toutes parties* A *et* B *de* E *:*

- $\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$ *;*
- $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$ *;*
- $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$*.*

Définition 13

La *différence symétrique* $A \times B$ est l'ensemble constitué des éléments de $A \cup B$ qui ne sont pas dans $A \cap B$: $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, soit encore :

$$A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}).$$

Exercice 15 *Donner des formules simples donnant* $\chi_{A\Delta B}$ *et* $\chi_{A\setminus B}$ *en fonction de* χ_A *et* χ_B*.*

4.2 Le théorème fondamental

On montrera *soigneusement et calmement* le résultat suivant :

PROPOSITION 5 *L'application φ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0,1\}^E$, qui à $A \in \mathcal{P}(E)$ associe $\varphi(A) = \chi_A$ est une bijection*[1]*.*

4.3 Applications

EXERCICE 16 ***Prouver** les relations données dans les exercices 7 et 15 en utilisant les fonctions indicatrices.*

EXERCICE 17 *Si A, B et C sont trois parties de E, montrer :*

$$A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C,$$

ainsi que :

$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C).$$

EXERCICE 18 *Comparer $A \cup (B\Delta C)$ et $(A \cup B)\Delta(A \cup C)$ (en faisant d'abord un dessin).*

[1]Bien entendu, il ne s'agit pas de prouver que $\varphi(A)$ est bijective...