Les 31 Mars et 3 Avril 2005

# Fonctions de plusieurs variables

## 1 Questions de régularité

On cherche à observer (et éventuellement prouver) la régularité de certaines fonctions : continuité, mais aussi caractère $\mathcal{C}^1$.

**Maple :** plot3d, max, min, abs, simplify, limit.

1. Soit $f_1 : (x,y) \mapsto \mathrm{Max}(x,y)$. Observer le graphe de $f_3$. Que pensez-vous de la continuité de cette fonction ? et de son caractère $\mathcal{C}^1$ ?
2. Même chose avec $f_2 : (x,y) \mapsto \mathrm{Min}(|x|, |y|)$.
3. On prend ici $f_3 : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^4 y}{x^6+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   (a) Cette fonction vous semble-t-elle continue en 0 ?
   (b) Evaluer $f_3\big((r\cos\theta)^\alpha, (r\sin\theta)^\beta\big)$ avec $\alpha$ et $\beta$ bien choisis.
   (c) Prouver que $f_3$ n'est pas continue en $(0,0)$.
4. Observer enfin la régularité des fonctions $f_4 : (x,y) \mapsto \sqrt{|x|+|y|}$ et $f_5 : (x,y) \mapsto \ln(1+\sqrt{x^2+y^2})$.

## 2 Un problème d'extremum

On cherche les extrema locaux et globaux de $f : (x,y) \mapsto x^2y^2 - x^2 - y^2$.

**Maple :** plot3d, diff, solve, plot, simplify.

1. Représenter la surface d'équation $z = f(x,y)$.
2. Déterminer les points critiques de $f$ (points en lesquels le gradient s'annule).
3. Représenter $f$ au voisinage de chacun de ces points ; deviner puis prouver la nature de ces points.
4. Etudier de même les extrema de $(x,y) \mapsto xy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}$.
   *On pourra étudier l'application $r \mapsto r^2 e^{-r^2/2}$.*

► <u>Les Maths derrière :</u> *Point critique, extremum local, point-selle.*

## 3 Un calcul de circulation

*Préliminaire mathématique : Une courbe fermée de l'espace est l'ensemble des valeurs prises par une application $\gamma$ - disons de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux - de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^3$, telle que $\gamma(a) = \gamma(b)$. La* circulation d'une forme différentielle *$\omega = p(x,y,z)dx + q(x,y,z)dy + r(x,y,z)dz$ selon la courbe $\gamma$ est définie à la physicienne, en notant $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, par :*

**Maple :** linalg, vector, crossprod, evalm, int, diff.

$$\oint_\gamma \omega = \int_a^b (p\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + q(x,y,z)y'(t) + r(x,y,z)z'(t))dt.$$

On considère le cercle $\Gamma$ d'équations $\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \end{cases}$

1. Déterminer le centre et le rayon de $\Gamma$, ainsi qu'une base orthonormée du plan $x+y+z=a$.
2. Paramétrer $\Gamma$, c'est-à-dire trouver une application $\gamma$ telle que $\Gamma$ soit l'ensemble des valeurs prises par $\gamma$ (indication : sauriez-vois le faire pour le cercle trigonométrique, dans le plan ? si oui, c'est pareil. Sinon, je ne peux rien pour vous !)
3. Calculer[1] $\displaystyle\oint_\gamma z dx + x dy + y dz$.

[1] Je passe pudiquement sur les questions d'orientation...