Les 17 et 21 Mars 2005

# Des suites et des intégrales

## 1 Des récurrences du premier ordre non monotones

On étudie ici deux suites vérifiant des relations de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, mais avec $f$ décroissante (et pas croissante comme habituellement).

**Maple :** plot, fsolve, seq, diff

1. Ici, $u_0 = 0$, et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(t) = \mathrm{e}^{-t}$.
   (a) Représenter le graphe de $f$ ainsi que la droite d'équation $y = x$ sur le même dessin. Prévoir le comportement de la suite $u$.
   (b) Ecrire une fonction prenant en entrée $n$ et retournant $u_n$.
   (c) Donner la suite des vingt premiers termes. Décrire le comportement.
   (d) Montrer que les suites $v$ et $w$ de termes généraux $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont monotones. *Par exemple en faisant intervenir la fonction $f \circ f$, qui est croissante, ce qui permet de "propager" l'inégalité entre les deux premiers termes.*
   (e) Montrer que $v$ et $w$ convergent l'une et l'autre vers un point fixe de $f \circ f$. Constater (éventuellement montrer selon le temps) qu'il existe un unique point fixe pour $f \circ f$. Conclure.
2. Sur le même schéma, étudier la suite $v$ définie par $v_0 = 0$, et la relation $v_{n+1} = g(v_n)$, avec $g(t) = \mathrm{e}^{-3t}$.

## 2 Des exercices du TD d'intégration

Les exercices suivants sont issus du TD d'untégration sur un segment. On ne demande pas de faire des preuves assistées, mais d'observer rapidement les résultats avec Maple.

**Maple :** limit, sum, add, seq, evalf, int, asympt, plot, D, diff, simplify

1. Montrer que $n^3 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^4 + k^2 n^2 + k^4}$ admet une limite (à calculer) lorsque $n \to \infty$. *On pourra demander la limite,puis évaluer la suite pour $n = 2^k$, avec $0 \leq k \leq 5$.*

   On montre (en maths !) Que la limite recherchée est $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2 + x^4}$. Evaluer cette intégrale avec Maple.
2. Donner un équivalent simple lorsque $n \to \infty$ de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} k \ln k$.
3. Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_{n,p} = \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{1/p} \right)^p$.

(a) Déterminer $\lim\limits_{p\to\infty}\big(\lim\limits_{n\to\infty} u_{n,p}\big)$.

(b) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\lim\limits_{p\to\infty} u_{n,p}\big)$.

4. Déterminer la limite, lorsque $u$ tend vers $0^+$, de $\displaystyle\int_u^{2u} \frac{\cos x}{x}dx$.
5. Représenter (sur un intervalle de bon goût) le graphe de l'application $x \mapsto \displaystyle\int_{x^2/6}^{3x^3} \sqrt{1-t^8}dt$. Calculer sa dérivée.

## 3 Des calculs d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

**Maple :** int, Int, intparts, value, simplify

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+5)};\qquad \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-4};\qquad \int_0^1 \frac{2x+3}{2x+1}dx;\qquad \int_0^1 \frac{x^2-5x+5}{x^2+4}dx;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1};\qquad \int_0^t \frac{x}{(x+1)^2}dx;\qquad \int_0^1 x^2(2x+1)^{10}dx;\qquad \int_{-1}^1 x^{19}(x^2+1)^{18}dx;$$

$$\int_a^b \frac{\operatorname{sh} t}{1+\operatorname{ch} t}dt;\qquad \int_0^1 x(\arctan x)^2 dx;\qquad \int_{\pi/2}^{\alpha} \frac{\cos^2(2x)}{\sin x};\qquad \int_0^1 \frac{1+\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh}^2 x}dx;$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 t dt;\qquad \int_0^{\pi/2} \sin^5 t dt;\qquad \int_{-1}^1 \sqrt{1+|x(1-x)|}dx;\qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^3 x}dx.$$

## 4 Une étude de fonction

*Rappel de l'exercice de TD correspondant :*

**Maple :** solve, int, plot, diff, simplify

1. *Montrer que pour tout $x$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_x^y e^{t^2}dt = 1$. Dans toute la suite, on note $y = \varphi(x)$ le réel ainsi associé à $x$.*
2. *Montrer que $\varphi$ est croissante ; déterminer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.*
3. *(difficile) Montrer que $\varphi$ est continue puis dérivable.*
4. *Montrer que la graphe de $\varphi$ admet un axe de symétrie et une asymptote en $+\infty$ et $-\infty$.*
5. *Esquisser le graphe de $\varphi$.*

On demande de ...

1. Résoudre $\displaystyle\int_0^y e^{t^2} = 1$.
2. Représenter le graphe de $\varphi$.
3. Trouver ce que vaut $\varphi(-\varphi(x))$ en fonction de $x$ (d'une façon ou d'une autre, sachant que d'un point de vue mathématique, le résultat est assez clair). En déduire l'existence d'un axe de symétrie pour le graphe de $\varphi$.