Méthode d'Euler

1 Préliminaires

EXERCICE 1 A l'aide de la fonction `plot`, tracer une ligne brisée reliant les points de coordonnées $(1, 0)$; $(3, 0)$; $(4, 2)$ et $(2, 3)$.

EXERCICE 2 Dessiner un octogone régulier (en considérant les racines 8-èmes de l'unité).

EXERCICE 3 On considère la suite u telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin u_n$. Construire la suite des 11 premiers termes $u_0, ..., u_{10}$.

On pourra commencer par constituer une suite s réduite à un élément `s:=1` *puis la faire grossir avec* `s:=s,...`

2 Méthode d'Euler

2.1 Le principe

On s'intéresse au problème de Cauchy $y'(t) = f\big(y(t)\big)$ avec comme condition initiale $y'(t_0) = y_0$. Par définition de la dérivée, on a "à la physicienne" :

$$y(t + h) \simeq y(t) + hy'(t) = y(t) + hf\big(y(t)\big)$$

(attention, il ne s'agit pas de l'équivalent du matheux : on obtiendrait ici une proposition (souvent) exacte et (toujours) grotesque...).

La méthode d'Euler à N pas de taille p issue de (t_0, y_0) a pour objectif d'approcher $u_k = y(t_0 + kp)$, pour $k \in [\![0, N]\!]$ à l'aide de la remarque précédente, ce qui consiste à poser $u_0 = y_0$, et pour $k \in [\![0, N-1]\!]$: $u_{k+1} = u_k + pf(u_k)$.

2.2 Mise en place

Ecrire une fonction `euler` prenant en entrée (f, y_0, N, p) et retournant la liste des $N+1$ valeurs $[u_0, u_1, ..., u_N]$.

3 Tests

EXERCICE 4 Tester la fonction `euler` avec pour donnée la fonction $f : t \mapsto t$, $y_0 = 1$, et $(p, N) = (0.5, 2)$ puis $(0.1, 10)$ et $(0.01, 100)$. Commenter.

EXERCICE 5 *Bonus*

Ecrire une fonction permettant de visualiser les suites de valeurs générées par la fonction `euler`.

Indication : comment feriez-vous à la main ?