Les 16, 23 et 30 Septembre 2005

Fonctions usuelles ; équations différentielles

Stéphane Gonnord - `http://stephane.gonnord.org/`

Avant de commencer le TP, on sortira feuilles de papier de brouillon et crayons ; puis on sauvera immédiatement sa feuille de travail dans son répertoire personnel.

Dans la marge, on trouve la liste des commandes utilisées dans le corrigé. Il est recommandé de "réinitialiser" Maple avec la commande `restart`, en particulier entre deux exercices.

1 Définir et représenter des fonctions

L'objectif de ce paragraphe est de maîtriser les manipulations de bases sur les fonctions : savoir les représenter, les définir, les dériver/évaluer.

Maple : plot, sqrt, asympt, D, diff, subs

1. Lorsque les intervalles de travail ne sont pas indiqués, on veillera à en choisir de pertinents (avec des essais/retouches).
   (a) Représenter le graphe de la fonction cos sur $[-\pi, 2\pi]$, puis les graphes de cos et sin sur cet intervalle sur un même dessin.
   (b) Représenter sur un même dessin les graphes des fonctions sinh, cosh et tanh.
   (c) Représenter les graphes des fonctions $x \mapsto x, x^2, \sqrt{x}$ sur $[0,1]$, $[1,3]$ et $[0,3]$.
   (d) Représenter le graphe de la fonction tan sur $[-\pi, \pi]$.
   (e) Représenter le graphe de l'application $x \mapsto x \ln x$.
2. Définir les fonctions $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x+3}}(x-2)$ et $g \mapsto x - 1$; vérifier la validité des définitions en demandant à Maple $f(x)$, mais aussi $f(t)$ et $f(3)$ (mauvaises surprises fréquentes...). Représenter sur un même dessin les graphes de f et g.
   La commande `asympt(f(x),x)` *pourra expliquer ce qu'on constate sur le dessin.*
3. Définir la fonction $h : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^x$, et représenter son graphe. Que vaut $h'(t)$? et $h'(2)$? Représenter les graphes de h et de sa dérivée sur un même dessin. Vérifier ce qu'il y a lieu de vérifier !

2 Des équations différentielles

Ici, on va voir comment résoudre formellement une équation différentielle. On termine par un exemple non linéaire, que Maple ne sait pas résoudre symboliquement ("avec une jolie formule"), mais pour lequel il peut donner une approximation numérique de la solution.

1. *Un premier exemple simple :* demander à Maple de résoudre l'équation $y'(t) = y(t)$. Evaluer la solution proposée en t, puis en 2.
2. *Diverses conditions initiales :*
   (a) Résoudre l'ED $y' = -y + t - 2$ avec la condition initiale $y(0) = -1$. Représenter la solution. Evaluer en quels points y change de variations (resp. de signe).
   (b) Représenter la solution de la même équation, mais avec comme condition initiale $y(0) = 1$. Trouver enfin une condition initiale $y(0) = y_0$ changeant l'aspect de la solution.
   (c) Représenter de même les solutions de $y' = y + t - 2$ avec diverses conditions initiales.
3. *Une équation non-linéaire :* on s'intéresse ici à l'équation $y' = |y(t)| + t - 2$ avec la CI $y(0) = -1$. On peut noter que, selon le signe de $y(t)$, on est ramené localement aux équations précédentes.
   (a) Vérifier que Maple ne sait pas résoudre symboliquement cette équation.
   (b) Représenter une approximation numérique de la solution à l'aide de la fonction `DEplot` du package `DEtools`.

Maple : dsolve, assign, plot, solve, fsolve, evalf, abs, with, DEtools, DEplot