Groupe orthogonal en petite dimension

1 Généralités

Exercice 1 (*)
Soient u_1 et u_2 deux automorphismes orthogonaux de E_1 et E_2, où E_1 et E_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E.

Peut-on toujours trouver $u \in O(E)$ tel que $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$?
On commencera par donner une condition suffisante simple et naturelle (portant sur E_1 et E_2 : pas sur l'âge du capitaine...), puis on montrera (éventuellement) qu'elle est nécessaire.

Exercice 2 (*)
Montrer qu'en dimension paire, les retournements engendrent $O(E)$, et qu'en dimension impaire, ils engendrent $SO(E)$ mais pas $O(E)$.
On pourra utiliser la génération de $O(E)$ par les réflexions...

Exercice 3 *(Grand classique taupinal)*
Soit $u \in O(E)$. On pose $v = \mathrm{Id}_E - u$.

1. Montrer : $E = \ker v \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} v$.
   On pourra commencer par montrer que ces deux sous-espaces sont orthogonaux.
2. Soit w la projection orthogonale de E sur $\ker v$. Montrer :

$$\forall x \in E, \qquad \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} u^i(x) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} w(x).$$

   NB : *On dit que x_k tend vers x quand $k \to +\infty$ lorsque $\|x_k - x\| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.*
   On décomposera $x \in E$ selon $\ker v$ et $\operatorname{Im} v$, et on regardera l'image des deux composantes par u^i.

2 En dimension 2

E désigne un espace euclidien orienté de dimension 2.

Exercice 4 Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la réflexion par rapport à $\mathbb{R}(2e_1 + e_2)$.

Exercice 5 Déterminer l'angle orienté $\widehat{(a,b)}$ si $a = 3e_1 + 4e_2$ et $b = e1 - 2e_2$.

Exercice 6 Que dire (précisément) de $u \circ v \circ u^{-1}$ si u est une rotation et v une réflexion ?

Exercice 7 En utilisant l'exercice précédent, déterminer les centres des groupes $O(E)$ et $SO(E)$ (le centre d'un groupe G est l'ensemble des $x \in G$ commutant avec tous les autres éléments du groupe, c'est-à-dire tels que pour tout $y \in G$, $x.y = y.x$, soit encore $x.y.x^{-1} = y$). *Bien sûr, la loi est ici $\circ$...*

Exercice 8 Donner la nature précise des endomorphismes de E dont les matrices dans une base orthonormée directe sont respectivement $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

3 En dimension 3

E est un espace euclidien orienté de dimension 3.

Exercice 9 Soient $a, b \in E$. Déterminer l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $a \wedge x = b$.
L'utilisation du mot "si" est autorisée...

Exercice 10 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $u \in SO(E)$ si et seulement si pour tout $x, y \in E$, $u(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$.

Exercice 11 Si $u, v, w, s \in E$, montrer (avec le moins de calculs possibles !) :

$$<u \wedge v|w \wedge s>=<u|w><v|s> - <u|s><v|w>$$

et :

$$(u \wedge v) \wedge (w \wedge s) = [u, v, s]w - [u, v, w]s.$$

Exercice 12 (*)
Soit (a, b, c) une famille libre de E. Trouver l'ensemble des $(x, y, z) \in E^3$ tels que

$$\begin{cases} x \wedge y &= c \\ y \wedge z &= a \\ z \wedge x &= b \end{cases}$$

Exercice 13 Déterminer les écarts angulaires mutuels entre les 3 vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$: e_1+e_2, e_1-e_3, $3e1 + 4e_2$, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 14 Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion par rapport à l'hyperplan $(2e_1 + e_2)^{\perp}$.

Exercice 15 Donner la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe dirigé et orienté par $e_1 + e_3$ (resp. $e_1 - e_3$) et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ (resp. $\dfrac{\pi}{3}$).

Exercice 16 Donner la nature précise des endomorphismes de E dont les matrices dans une base orthonormée est :

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix},\ B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2 \end{pmatrix},\ D = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \\ 1 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$: montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) Il existe $x_0 \in E$ tel que u est l'application $x \mapsto x_0 \wedge x$.

(ii) Il existe une b.o.n.d. dans laquelle la matrice M de u est antisymétique (i.e. : ${}^tM = -M$).

(iii) Dans toute b.o.n.d., la matrice de u est antisymétique.

Lorsque ces conditions sont vérifiées, que dire de la matrice de u dans une base orthonormée qui n'est pas directe ?

Exercice 18 Reprendre les exercices 6 et 7 du paragraphe précédent.