Groupe orthogonal en petite dimension

Table des matières

1 Généralités **2**
- 1.1 Rappels et définitions . . . 2
- 1.2 Premières propriétés . . . 2
- 1.3 Matrices orthogonales vs endomorphismes orthogonaux . . . 3
- 1.4 Symétries orthogonales . . . 4

2 Groupe orthogonal en dimension 2 **5**
- 2.1 Rotations . . . 5
- 2.2 Réflexions . . . 6
- 2.3 Angle orienté entre deux vecteurs . . . 7

3 Groupe orthogonal en dimension 3 **8**
- 3.1 Produits mixte et vectoriel . . . 8
- 3.2 Ecart angulaire entre deux vecteurs . . . 10
- 3.3 Etude des rotations . . . 10
- 3.4 Classification complète de $O(E)$ (HP) . . . 14

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace euclidien. Le produit scalaire est noté $< \mid >$ et la nome associée $\| \|$.
La première partie établit des définitions et résultats élémentaires généraux ; les suivantes décrivent les groupes orthogonaux en dimension 2 et 3.

1 Généralités

1.1 Rappels et définitions

Définition 1
Les matrices orthogonales sont les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tM.M = I_n$. L'ensemble des matrices orthogonales est noté $O_n(\mathbb{R})$.

Remarques 1
- On sait que si ${}^tM.M = I_n$, on a alors également $M.{}^tM = I_n$ (pourquoi au fait ?).
- En pratique, l'appartenance de M à $O_n(\mathbb{R})$ revient au fait que "les vecteurs colonnes constituent une famille orthonormée", c'est-à-dire : en voyant M comme la matrice représentant des vecteurs $v_1, ..., v_n$ de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire usuel) dans la base canonique, alors $(v_1, ..., v_n)$ est orthonormée.
- Les matrices orthogonales ont pour déterminant 1 ou -1. Celles de déterminant 1 constituent un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$, noté $SO_n(\mathbb{R})$.

Définition 2
$u \in \mathcal{L}(E)$ est dit orthogonal lorsqu'il conserve le produit scalaire :

$$\forall x, y \in E, \qquad <u(x)|u(y)>=<x|y> .$$

L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E est noté $O(E)$.

Exemples 1
- *L'application* Id_E *est orthogonale !*
- *Les symétries orthogonales sont des endomorphismes orthogonaux (le vérifier de façon élémentaire).*
- *Les projections orthogonales ne sont pas des endomorphismes orthogonaux (méfiance donc avec le vocabulaire...) dès que le sous-espace sur lequel on projette est autre chose que* E *(cas de* Id_E*). En effet, si* $x \in F^\perp \setminus \{0\}$*, on a* $<p(x)|p(x)>= 0 \neq <x|x>$*...*

1.2 Premières propriétés

Fait 1 *u est orthogonal si et seulement si u conserve la norme.*

Preuve : Dans le sens direct, c'est évident (comme d'habitude, ne pas se poser la question "ben pourquoi c'est évident ?", mais essayer de le prouver en regardant CE QU'IL FAUT PROUVER...). Pour la réciproque, utiliser une formule de polarisation (qui fournit le produit scalaire en fonction de normes). ∎

Fait 2 *Si u est orthogonal, alors il est bijectif.*

Preuve : Le fait précédent nous assure que u conserve la norme, donc est injectif, puis bijectif du fait de la dimension finie. ∎

Remarque 2 Le caractère injectif ne dépend pas de la dimension finie, par contre le caractère bijectif oui : si on prend l'application $P \mapsto XP$ dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $<P|Q>= \sum p_i q_i$, on obtient un endomorphisme qui conserve le produit scalaire mais qui n'est pas bijectif.

Fait 3 *Si $u \in O(E)$, il tranforme toute base orthonormée en une base orthonormée. Réciproquement, si $u \in \mathcal{L}(E)$ tranforme UNE b.o.n. en une b.o.n., alors il est orthogonal (et transforme donc TOUTE b.o.n. en une b.o.n. !).*

Preuve : Le premier résultat est direct. Pour le second, ce n'est guère plus compliqué : décomposer un vecteur donné selon la b.o.n. en question. ■

Fait 4 *Si $u \in O(E)$, alors sa bijection réciproque est aussi dans $O(E)$. De plus, si $v \in O(E)$, alors $u \circ v \in O(E)$.*

Remarque 3 Du fait précédent, on déduit que $O(E)$ est un groupe ; c'est en fait un sous-groupe de $\big(GL(E), \circ\big)$. On parlera donc de "groupe orthogonal"...

Le dernier résultat est à savoir établir rapidement : on l'utilise souvent quand on analyse les endomorphismes orthogonaux (accessoirement, c'est une question préliminaire classique pour bien des problèmes)

Fait 5 *Si $u \in O(E)$ et F est un sous-espace de E, alors $u(F)^\perp = u(F^\perp)$.*

Preuve : L'inclusion $\supset$ se fait à encéphalogramme plat. L'autre sera établie par des arguments de dimensions (se souvenir qu'un endomorphisme injectif conserve la dimension des sous-espaces...). ■

1.3 Matrices orthogonales vs endomorphismes orthogonaux

Proposition 1 *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) u est orthogonal ;

(ii) il existe une b.o.n. dans laquelle la matrice de u est orthogonale ;

(iii) dans toute b.o.n., la matrice de u est orthogonale.

Preuve : C'est une traduction matricielle du fait 3 ! ■

Remarques 4

- On notera les deux extrémités de la chaîne d'implication :

$$\exists b \parallel \perp \parallel;\ ... \qquad \Longrightarrow \qquad u \in O(E) \qquad \Longrightarrow \qquad \forall b \parallel \perp \parallel,\ ...$$

- On ne peut pas se contenter d'une base orthogonale : dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(e1, 2e2)$ n'est pas orthogonal (il ne conserve pas la norme !) bien que A soit une matrice orthogonale.
- Le déterminant des endomorphismes orthogonaux vaut donc 1 ou -1...

Définition 3
$SO(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E qui ont pour déterminant 1.

Remarques 5

- Du fait des "propriétés morphiques" du déterminant, $SO(E)$ est un sous-groupe de $O(E)$. On parle de *groupe spécial orthogonal*. Il sera parfois noté $O^+(E)$.
- Le fait 3 peut alors être adapté en remplaçant $O(E)$ par $SO(E)$ et b.o.n. par b.o.n.d. (base orthonormée directe).

1.4 Symétries orthogonales

Définition 4

- Si F est un sous-espace de E, la symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie par rapport à F dans la direction $F^\perp$ (définition justifiée par le fait qu'en dimension finie, $E = F \oplus F^\perp$).
- Une *réflexion* est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.
- Un *retournement* est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Remarques 6

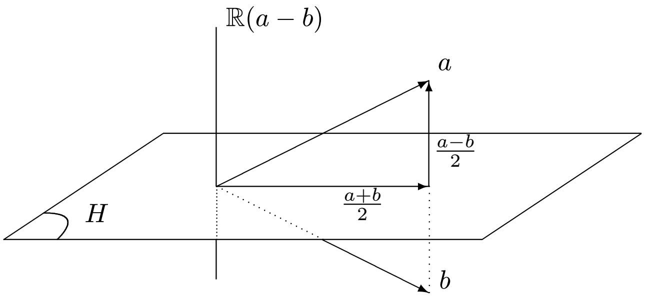
- En dimension 2, retournements et réflexions coïncident puisque $1 = 2 - 1$! Il s'agit des symétries orthogonales par rapport à des droites.
- En dimension 3, les retournements correspondront à des "rotations d'angle π" et les réflexions sont des symétries orthogonales par rapport à des plans. Les premières sont dans $SO(E)$ et pas les secondes : pourquoi ?

Exercice 1 *On a déjà vu (directement) que les symétries orthogonales sont des endomorphismes orthogonaux : le montrer à nouveau avec Pythagore, puis avec les matrices.*

Le résultat suivant sera utile pour étudier les groupes orthogonaux : grosso modo, il permettra de "créer des points fixes" à des endomorphismes n'en n'ayant pas !

Proposition 2 *Soient a et b deux vecteurs distincts non nuls de même norme. Alors il existe une unique réflexion envoyant a sur b.*

Preuve : On commence par faire un dessin, en faisant apparaître le "plan candidat" H de la réflexion (le plus simple étant de commencer par lui PUIS de placer a et b) :



Pour l'existence de la réflexion le dessin nous invite à considérer l'hyperplan $H = (a-b)^\perp$. Les décompositions $a = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}$ et $b = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a-b}{2}$ que nous inspire le dessin vont nous permettre de conclure pour peu qu'on montre que $\dfrac{a+b}{2} \in H$ et $\dfrac{a-b}{2} \in H^\perp$. Pour le premier point, il suffit de vérifier (par définition de H) que $<\frac{a+b}{2}|a-b>= 0$, ce qui ne pose pas de problème (c'est ici que l'égalité des normes intervient). Pour le second point, il suffit de noter que $H^\perp = \left((a-b)^\perp\right)^\perp = \mathbb{R}(a-b)$ (pourquoi ?).
Pour l'unicité : supposons que la réflexion par rapport à l'hyperplan H_1 envoie a sur b. Par définition d'une réflexion, on a alors $a - b \perp H_1$ donc $\mathbb{R}(a-b) \subset H_1^\perp$. Il y a ensuite égalité du fait des dimensions, et ainsi, $H_1 = (a-b)^\perp$.
Notons qu'une analyse-synthèse était possible : la deuxième phase de la preuve précédente nous fournit le seul hyperplan candidat envisageable, et il n'y a plus qu'à vérifier qu'il convient effectivement. ■

Exercice 2 *Montrer que si on change "réflexion" par "retournement", il y a toujours existence, et unicité sauf lorsque $b = -a$.*

2 Groupe orthogonal en dimension 2

E est dans cette partie de dimension 2, et on l'oriente en choisissant une base orthonormée $\mathcal{E}_0$ que l'on déclare directe[1]. On va voir que les matrices orthogonales, ainsi que les endomorphismes orthogonaux sont complètement connus : ce sont des objets géométriques rencontrés au lycée...

On commence par définir le produit mixte de deux vecteurs : c'est un scalaire qui est intimement lié à l'orientation de l'espace.

Définition 5
Soient u et v deux vecteurs de E. Leur *produit mixte*, noté $[u, v]$ est par définition $\det_{\mathcal{E}_0}(u, v)$, c'est-à-dire le déterminant de la matrice représentant u et v dans la base de référence $\mathcal{E}_0$.

Remarques 7
- Si $\mathcal{F}$ est une AUTRE b.o.n.d., alors la matrice A représentant (u, v) dans la base $\mathcal{E}_0$ vaut PB, où P est la matrice de passage de $\mathcal{E}_0$ vers $\mathcal{F}$ et $B = \operatorname{Mat}_{\mathcal{F}}(u, v)$. Puisque P est dans $SO_2(\mathbb{R})$ (matrice de passage entre deux b.o.n.d.), sont déterminant vaut 1, de sorte que $[u, v] = \det_{\mathcal{F}}(u, v)$. Le produit mixte peut donc être calculé le dans n'importe quelle b.o.n.d., et on ne s'en privera pas !
- Essentiellement, le produit mixte nous permettra de déterminer l'angle orienté entre deux vecteurs...

2.1 Rotations

Commençons par la description de $SO_2(\mathbb{R})$: pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Un simple calcul permet de vérifier le

Fait 6 *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta \in SO_2(\mathbb{R})$, et de plus :*

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \qquad R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}.$$

L'application $\theta \mapsto R_\theta$ réalise donc un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $\big(SO_2(\mathbb{R}), .\big)$. Le résultat suivant dit que ce morphisme est surjectif.

Proposition 3 $SO_2(\mathbb{R}) = \big\{R_\theta \;\big|\; \theta \in \mathbb{R}\big\}$.

Preuve : L'inclusion $\supset$ a déjà été vue. Pour l'autre, on fixe $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans $SO_2(\mathbb{R})$. $a^2 + b^2 = 1$, donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos\varphi$ et $b = \sin\varphi$. De même, il existe $\psi \in \mathbb{R}$ telle que $c = \sin\psi$ et $d = \cos\psi$. La condition sur le déterminant s'écrit $\cos(\varphi + \psi) = 1$, donc $\varphi + \psi$ est de la forme $2k\pi$. On a alors $\sin\psi = \sin(2k\pi - \varphi) = -\sin\varphi$, et $\cos\psi = \cos(2k\pi - \varphi) = \cos\varphi$, de sorte que $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = R_\varphi$. ■

Remarques 8
- Cela inclut la matrice I_2 qui vaut R_0, mais aussi $R_{4000\pi}$.
- En changeant seulement la fin de la preuve, on montrerait que les matrices orthogonales de déterminant -1 sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Exercice 3 *En utilisant les deux résultats de cette partie, montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.*

Reprenons l'étude géométrique de $SO(E)$: le résultat qui suit nous dit que ses éléments ont une matrice qui ne dépend pas de la base (orthonormée directe...) dans laquelle on les représente.

[1]En pratique, si on travaille dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne usuelle, on déclare en général la base canonique directe...

Proposition 4 *Si $u \in SO(E)$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute b.o.n.d., la matrice représentant u est R_θ.*

Preuve : On sait que la matrice de u dans toute b.o.n.d. est dans $SO_2(\mathbb{R})$ donc de la forme R_θ, mais le tout est de montrer que cette matrice *ne dépend pas de la base considérée.*
Déjà, la matrice de u dans $\mathcal{E}_0$ est dans $SO_2(\mathbb{R})$, donc de la forme $A = R_{\theta_0}$. Si $\mathcal{F}$ est une autre b.o.n.d., la matrice B représentant u dans $\mathcal{F}$ est $B = P^{-1}AP$, avec P la matrice de passage entre $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{F}$. Puisque ces deux bases sont orthonormées directes, P est dans $SO_2(\mathbb{R})$, et on peut alors utiliser la commutativité (cf exercice 3) pour obtenir : $B = P^{-1}PA = A = R_{\theta_0}$. ■

Définition 6
Si $\theta \in \mathbb{R}$, la rotation d'angle θ (que je noterai r_θ) est l'endomorphisme de E dont la matrice dans toute b.o.n.d. est R_θ.

Remarque 9 Si r est une rotation admettant un vecteur (non nul) x fixe (c'est-à-dire : $r(x) = x$), alors $r - \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective, donc son déterminant est nul. Si θ est un angle de cette rotation, ce déterminant vaut $(\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta = 2\cos\theta - 1$. On a donc $\cos\theta = 1$ puis $\sin\theta = 0$: r est en fait l'application identité.

Exercice 4 *Soit $x \in E$. Montrer :* $[x, r_\theta(x)] = \sin\theta \|x\|^2$. On pourra par exemple travailler dans une b.o.n.d. dont le premier vecteur est $\dfrac{x}{\|x\|}\cdot$

2.2 Réflexions

Commençons par quelques exercices simples mais qui éclaireront la suite...

Exercice 5 *Ecrire la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ de la réflexion par rapport à $\mathbb{R}e_1$. Donner ensuite la matrice de cette même réflexion dans la b.o.n.d. (f_1, f_2), avec $f_1 = \dfrac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}$ et $f_2 = \dfrac{-e_1 + e_2}{\sqrt{2}}\cdot$*

Exercice 6 *Donner la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ de la réflexion par rapport à $\mathbb{R}(\cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2)$.*

Exercice 7 *Que dire de la composée de deux réflexions (sans rentrer dans les détails) ?*

Exercice 8 *Calculer le produit $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en raisonnant uniquement géométriquement. Vérifier ensuite le résultat !*

Proposition 5
- *Les éléments de $O(E)$ qui ne sont pas des rotations sont des réflexions.*
- *Toute rotation peut s'écrire comme composée de deux réflexions.*

Preuve :
- Soit $u \in O(E) \setminus SO(E)$: La matrice A de u dans $\mathcal{E}_0$ est dans $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$, donc de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. Deux possibilités alors :
  1. On a traité l'exercice 6, et on peut alors affirmer que u est la réflexion par rapport à $\mathbb{R}\big(\cos\frac{\theta}{2}e_1 + \sin\frac{\theta}{2}e_2\big)$, avec $\mathcal{E}_0 = (e_1, e_2)$.

2. On ne l'a pas traité (bravo...) et on peut alors chercher s'il existe des vecteurs (non nuls) vérifiant $u(x) = x$ ou $u(x) = -x$, ce qui revient à la non injectivité de $u - \mathrm{Id}_E$ et $u + \mathrm{Id}_E$. Les déterminants de $\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cos\theta + 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta + 1 \end{pmatrix}$ étant nuls, on est effectivement assuré de l'existence de x_1 et x_2 non nuls tels que $u(x_1) = x_1$ et $u(x_2) = -x_2$. Puisque $<u(x_1)|u(x_2)>$ vaut d'une part $<x_1|x_2>$ et d'autre part $<x_1| - x_2> = - <x_1|x_2>$, on a donc x_1 et x_2 orthogonaux, puis $E = \mathbb{R}x_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{R}x_2$, et u est bien la réflexion par rapport à $\mathbb{R}x_1$.

- Soit $r \in SO(E)$: si on fixe une réflexion s, alors $r \circ s$ est dans $O(E) \setminus SO(E)$ (regarder le déterminant !) donc est une réflexion s' d'après ce qui précède. Mais dans la relation $r \circ s = s'$, si on compose à droite par s, on trouve : $r = s' \circ s$!

■

Remarques 10
- Attention !!!! le premier résultat est spécifique à la dimension 2. En dimension supérieure, il existe des éléments de $O(E) \setminus SO(E)$ qui ne sont pas des réflexions. Cependant, tout élément de $O(E)$ peut s'écrire comme la composée d'au plus n réflexions.
- Il n'y a pas unicité de la décomposition comme composée de deux réflexions : au vu de la preuve, on peut même prendre la première comme on veut !

2.3 Angle orienté entre deux vecteurs

Fait 7 *Si $x, y \in E$ sont de norme 1, alors il existe une unique rotation r telle que $r(x) = y$.*

Preuve : Pour l'existence, il suffit de compléter x en une b.o.n.d. (x, x') et y en une b.o.n.d. (y, y'). L'unique application linéaire envoyant x sur y et x' sur y' répond alors au problème (justifier l'existence de cette application, et le fait qu'elle répond au problème !).
Pour l'unicité, il suffit de noter que si r_1 et r_2 répondent au problème, alors $r_1^{-1} \circ r_2$ est une rotation (pourquoi ?) qui admet un point fixe (lequel ?) donc vaut l'identité (pourquoi ?). ■

Remarque 11 En dimension supérieure, l'existence est maintenue (en termes snobs, on dit que "$SO(E)$ agit transitivement sur la sphère unité de E"). Cependant, l'unicité n'est plus valide (on peut compléter de nombreuses façons, contrairement à la dimension 2).

Définition 7
Soient a et b deux vecteurs non nuls de E. On dit (abusivement) que θ est l'angle orienté entre a et b, et on note $\theta = \widehat{(a, b)}$, lorsque $\dfrac{b}{\|b\|} = r_\theta(\dfrac{a}{\|a\|})$.

Remarque 12 En fait, si $\dfrac{b}{\|b\|} = r_\theta(\dfrac{a}{\|a\|})$, alors $\dfrac{b}{\|b\|} = r_\varphi(\dfrac{a}{\|a\|})$ si et seulement si φ est de la forme $\theta + 2k\pi$ (dans un sens, c'est clair, mais dans l'autre ? pour montrer le sens "seulement si", on pourra se rappeler que la seule rotation avec un point fixe est l'identité). Ainsi, l'angle orienté entre deux vecteurs est "défini modulo 2π". Il est caractérisé par son cos et son sin.

Le résultat suivant permet de calculer effectivement les angles orientés. Pour le prouver, et très exceptionnellement, on se placera dans une b.o.n.d. adaptée...

Fait 8 *Si $\theta = \widehat{(a, b)}$, alors $<a|b> = \|a\|\|b\| \cos\theta$ et $[a, b] = \|a\|\|b\| \sin\theta$.*

Exercice 9 *Montrer que les rotations conservent les angles orientés, alors que les réflexions les changent en leur opposé.*

3 Groupe orthogonal en dimension 3

3.1 Produits mixte et vectoriel

On commence par définir le produit mixte de la même façon qu'en dimension 3 : l'espace est préalablement orienté par une base $\mathcal{E}_0$ déclarée directe.

Définition 8
Si $a, b, c \in E$, on définit leur produit mixte par $[a, b, c] = \det_{\mathcal{E}_0}(a, b, c)$. Comme en dimension 2, on peut remplacer $\mathcal{E}_0$ par n'importe qu'elle b.o.n.d.

Remarque 13 *A MEDITER AVANT LA SUITE...*
Le produit mixte "hérite" des propriétés du déterminant : en particulier, si on FIXE $a, b \in E$, alors l'application $\varphi : x \mapsto [a, b, x]$ est linéaire. C'est donc une forme linéaire, et on sait alors[2] qu'il existe un unique $c \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = <c|x>$ (attention à la quantification...).

Définition 9
Soient $u, v \in E$. Le *produit vectoriel* de u et v, noté $u \wedge v$, est l'unique vecteur z tel que pour tout $w \in E$, $[u, v, w] = <z|w>$.

Les premiers résultats qui suivent s'obtiendraient facilement à l'aide des formules fournissant les coordonnées d'un produit vectoriel dans une base orthonormée. Cependant, on peut les démontrer à partir de la définition précédente, qui est assez abstraite, mais qui a le mérite de ne pas fournir des formules étranges, parachutées, et dépendant (a priori) d'une base particulière.

Proposition 6 *(Les quantificateurs universels sont implicites)*
- $u \wedge u = \overrightarrow{0}$, $v \wedge u = -u \wedge v$ *(attention !)*, $(\lambda u_1 + u_2) \wedge v = \lambda u_1 \wedge v + u_2 \wedge v$, $u \wedge (\lambda v_1 + v_2) = \lambda u \wedge v_1 + u \wedge v_2$ *;*
- $u \wedge v \in \big(\mathrm{Vect}(u, v)\big)^{\perp}$ *;*
- *u et v sont colinéaires si et seulement si $u \wedge v = 0$;*
- *si u et v ne sont pas colinéaires, alors $(u, v, u \wedge v)$ est libre.*

Preuve :
- Pour tout $w \in E$, le caractère alterné du déterminant nous assure : $<u \wedge u|w> = [u, u, w] = 0 = <\overrightarrow{0}|w>$. Ceci étant valable pour tout w, on a donc $u \wedge u = \overrightarrow{0}$. Même chose pour les 3 autres relations.
- Soit $z \in \mathrm{Vect}(u, v)$: il s'écrit $z = \alpha u + \beta v$, et on a alors :
$$<u \wedge v|z> = [u, v, z] = \alpha[u, v, u] + \beta[u, v, v] = 0,$$
donc $u \wedge v$ est orthogonal à tous les éléménts de $\mathrm{Vect}(u, v)$.
- Déjà, si u et v sont colinéaires, $<u \wedge v|w>$ $[u, v, w] = 0$ pour tout $w \in E$, donc $u \wedge v = 0$. Etablissons la réciproque par la contraposée : on suppose (u, v) libre. On peut alors compléter cette famille en une base (u, v, w). Le déterminant $[u, v, w]$ est alors non nul, donc $<u \wedge v|w> \neq 0$, donc $u \wedge v \neq \overrightarrow{0}$.
- Il suffit de noter que le déterminant $[u, v, u \wedge v]$ vaut $<u \wedge v|u \wedge v> = \|u \wedge v\|^2$, qui est non nul d'après le résultat précédent.

■

Ca y est : voila la "formule" que vous attendiez...

Proposition 7 *Si les coordonnées de u (resp. v) dans une base orthonormée directe $\mathcal{E}$ sont* $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *(resp.* $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ *) alors celles de $u \wedge v$ dans cette même base sont :* $\begin{pmatrix} bc' - cb' \\ ca' - ac' \\ ab' - ba' \end{pmatrix}$

[2] "théorème de représentation"

Preuve : Simple calcul. Si x a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{E}$, alors en développant le déterminant par rapport à la dernière colonne :

$$<x|u\wedge v>=[u,v,x]=\begin{vmatrix}a & a' & x_1\\ b & b' & x_2\\ c & c' & x_3\end{vmatrix}=x_1(bc'-cb')-x_2(ac'-ca')+x_3(ab'-ba')=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}bc'-cb'\\ca'-ac'\\ab'-ba'\end{pmatrix}$$

et on peut identifier les deux extrémités car la relation est valable pour tout x. ■

Remarque 14 On retiendra : $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}bc'-b'c\\ \dots\\ \dots\end{pmatrix}$ mais *attention* : il faut que la base dans laquelle on a pris les coordonnées soit orthonormée directe.

Les deux corollaires suivants sont très utiles en pratique...

Corollaire 1 *Si (u,v) est une famille orthonormée, alors $(u,v,u\wedge v)$ est une b.o.n.d. de E.*

Corollaire 2 *Si (e_1,e_2,e_3) est une b.o.n.d. de E, alors $e_1\wedge e_2=e_3$, $e_2\wedge e_3=e_1$, $e_3\wedge e_1=e_2$, et les autres produits vectoriels s'obtiennent par antisymétrie.*

Exercice 10 Utile pour la suite...
Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de l'application $\overrightarrow{x}\mapsto\overrightarrow{x_0}\wedge\overrightarrow{x}$, avec $x_0=(a,b,c)$.

De façon plus anecdotique (en maths, pas en méca !), voici la mystérieuse formule du “double produit vectoriel” :

Proposition 8 *Si $a,b,c\in E$, on a :*

$$a\wedge(b\wedge c)=<a|c>b-<a|b>c.$$

Preuve : Déjà, si (b,c) est liée,alors le membre de gauche est nul, ainsi que le membre de droite. On va donc traiter le cas où (b,c) est libre, et on fixe b et c ainsi. Si on note $H=\mathrm{Vect}(b,c)$, on a alors $d=b\wedge c\in H^{\perp}$, donc $a\wedge d$ est orthogonal à d, donc est dans $(H^{\perp})^{\perp}=H$.
On travaille donc dans une base adaptée au problème : il existe (pourquoi ?) une b.o.n.d. (f_1,f_2,f_3) telle que $b=\alpha f_1$ et $c=\beta f_2+\gamma f_3$. On écrit alors $a=a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3$, et on calcule les coordonnées de chacun des deux membres dans cette base. Pour le membre de gauche :

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\wedge\left(\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\beta\\\gamma\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\alpha\gamma\\-a_1\alpha\gamma\\0\end{pmatrix}$$

et pour le membre de droite :

$$(a_1\beta+a_2\gamma)\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix}-a_1\alpha\begin{pmatrix}\beta\\\gamma\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\gamma\alpha\\-a_1\alpha\gamma\\0\end{pmatrix}$$

Gagné... ■

Remarques 15

- Voila comment je la retiens ($\pm$ ...) : je refais le raisonnement vu en début de preuve, et je sais alors que $a\wedge(b\wedge c)=\alpha b+\beta c$; je sais que α et β sont des produits scalaires, et que dans chacun des deux termes, a, b et c apparaissent. Je sais qu'il y a un signe “-”, et je traite un cas particulier “avec les doigts” pour savoir où.

- Avec Maple, c'est bien plus simple ! Voir la feuille jointe...

Exercice 11 *Donner une formule analogue pour* $(a \wedge b) \wedge c$ *:*
- *En utilisant l'anti-commutativité et la formule précédente ;*
- *avec des considérations similaires à celles données dans les remarques précédentes.*

3.2 Ecart angulaire entre deux vecteurs

On ne peut plus parler d'angle orienté entre deux vecteurs, en dimension 3 (on pourrait être tenté de se ramener à la dimension 2, mais il faudrait pour cela orienter le plan qu'ils génèrent, or il y a deux façons "équiraisonnables" de faire : comment choisir ?). On prend donc le parti de ne regarder que le produit scalaire, dont on déduira un angle entre 0 et π, les cas extrêmes correspondant aux cas où les vecteurs sont (positivement ou négativement) liés.

Définition 10
Si u et v sont deux vecteurs non nuls de E, l'écart angulaire entre u et v, noté (u, v) (?) est l'unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $<u|v>= \|u\|\|v\| \cos\theta$.

Remarques 16
- C'est bien licite d'après Cauchy-Schwarz...
- Avec cette définition, on vérifie immédiatement que les endomorphismes orthogonaux conservent les écarts angulaires.
- lorsque u et v sont positivement (resp. négativement) liés, leur écart angulaire est 0 (resp. π), et réciproquement (cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz...).

On termine par une formule bien connue en physique, claire lorsque les vecteurs sont colinéaires ou orthogonaux :

Fait 9 *Si* θ *est l'écart angulaire entre* x *et* y*, alors :* $\|x \wedge y\| = \|x\|\|y\| \sin\theta$.

Preuve : Travailler dans une base adaptée au problème, comme toujours... ■

Corollaire 3
$$\forall a, b \in E, \qquad \|a \wedge b\|^2 + <a|b>^2 = \|a\|^2.\|b\|^2$$
("identité de Lagrange").

3.3 Etude des rotations

On ne peut pas décrire les éléments de $SO_3(\mathbb{R})$ aussi simplement que ceux de $SO_2(\mathbb{R})$. Par contre, géométriquement, la description des membres de $SO(E)$ est relativement claire :

Proposition 9 *Si* $u \in SO(E)$*, alors il existe une b.o.n.d.* $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ *telle que :*
$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{F}} u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
(la question de l'unicité de $\mathcal{F}$ *et* θ *sera discutée plus loin).*

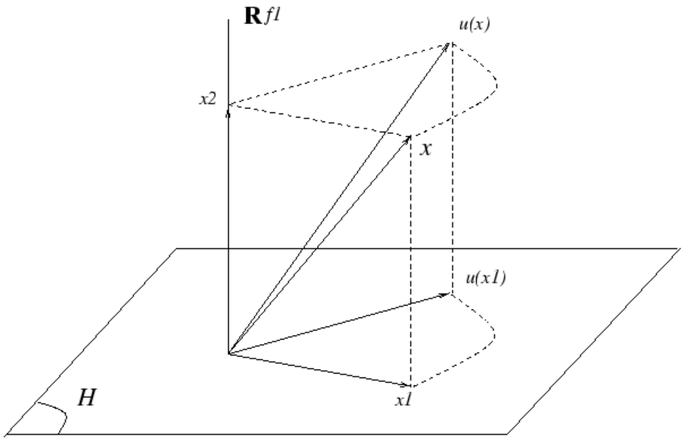
Preuve : La clef de voûte de la preuve est l'existence d'un vecteur (non nul !) fixé par u. On propose ici une preuve efficace (une preuve géométrique est fournie dans les remarques). On veut montrer que $u - \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective. Considérons[3] l'application $\varphi : \lambda \mapsto \det(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$. En travaillant dans n'importe quelle base, on voit que φ est une application polynômiale du troisième degré, de coefficient dominant -1, et qui

[3] Ici, ça semble très astucieux, mais ily a quand même des raisons assez naturelles pour considérer cette application...

vaut $\det u = 1$ en 0. Puisqu'elle tend vers $-\infty$ en $+\infty$ (du fait de son coefficient dominant), sa continuité nous assure (théorème des valeurs intermédiaires) qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\varphi(\lambda_0) = 0$. On a alors $u - \lambda_0$ non injective, donc il existe x_0 non nul tel que $u(x_0) = \lambda_0 x_0$. Comme u préserve la norme, on doit avoir $|\lambda_0| = 1$, puis $\lambda_0 = 1$, et c'est gagné.
On sait maintenant que $\mathbb{R}x_0$ est stable par u, donc son orthogonal $H = x_0^\perp$ également (déjà prouvé plus tôt mais refaites le sans revenir en arrière dans le poly !). Ainsi, u induit un endomorphisme v de H. Cet endomorphisme reste orthogonal (pourquoi ?). Si on fixe une base orthonormée (f_2, f_3) de H et on note $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de v dans cette base (on sait déjà que $R \in O_2(\mathbb{R})$), on a en prenant $f_1 = \dfrac{x_0}{\|x_0\|}$:
$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{F}} u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$. Comme $\det u = 1$, on a donc $\det R = 1$, donc $R \in SO_2(\mathbb{R})$, ce qui impose sa forme.
Si jamais $\mathcal{F}$ n'est pas directe, il suffit de remplacer f_1 par son opposé, ce qui n'affecte pas la matrice.
En fait, j'ai imposé le caractère direct dans l'énoncé car c'est sous cette condition qu'on parlera de la rotation d'axe dirigé et orienté par f_1 et d'angle θ... ■

Remarques 17

- Sans passer par le déterminant de $\lambda \mathrm{Id}_E - u$, on peut prouver l'existence d'un vecteur non nul fixe de façon purement géométrique (pour éblouir les collègues géomètres en kholle !) : on fixe x_0 non nul. Si $u(x_0) = x_0$, c'est terminé. Sinon, il existe une réflexion s_1 par rapport à un hyperplan H_1 envoyant $u(x_0)$ sur x_0. L'application $v = s_1 \circ u$ envoie alors x_0 sur lui-même : comme v est orthogonal, il stabilise $x_0^\perp$. Maintenant, la restriction de v à $x_0^\perp$ est une réflexion (déterminant...) par rapport à une droite $\mathbb{R}x_1$. v est alors la réflexion s_2 par rapport à $H_2 = \mathrm{Vect}(x_0, x_1)$. Ainsi, $s_1 \circ u = s_2$, puis $u = s_1 \circ s_2$, et il n'y a plus qu'à considérer l'intersection $H_1 \cap H_2$: c'est une droite (ou un plan) dont les éléments sont fixés par les deux réflexions, donc par u : gagné !
- Géométriquement, l'application u de la proposition précédente agit de la façon suivante : si $x \in E$, on le décompose $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in H$ et $x_2 \in \mathbb{R}f_1$. La composante x_1 n'est pas modifiée, tandis que u opère une rotation de la composante x_2 d'angle θ, H étant orienté par la (f_2, f_3) :



- Que dire si par ailleurs $\operatorname*{Mat}_{\mathcal{F}'} u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ avec $\mathcal{F}'$ une autre b.o.n.d. ? Déjà, par égalité des traces, on a $\cos\theta = \cos\varphi$ donc $\theta = \varphi$ $[2\pi]$ ou bien $\theta = -\varphi$ $[2\pi]$. Si θ (donc φ) est de la forme $2k\pi$, u vaut l'identité et on pouvait prendre $\mathcal{F}$ n'importe comment. Sinon, $\ker(u - \mathrm{Id}) = \mathbb{R}f_1 = \mathbb{R}f_1'$, donc f_1' vaut f_1 ou $-f_1$.

  Dans le premier cas, la matrice de changement de base entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R \end{pmatrix}$ avec $R \in SO_2(\mathbb{R})$. Par commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$, la formule de changement de base nous fournira alors $R_\varphi = R_\theta$ donc $\varphi = \theta$ $[2\pi]$.
  Dans le second cas, $\mathcal{F}'' = (f_1, f_3', f_2')$ est orthonormée directe et la matrice de passage entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}''$

est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R \end{pmatrix}$ avec $R \in SO_2(\mathbb{R})$, donc la matrice de u dans $\mathcal{F}''$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Comme par ailleurs c'est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, on en déduit que $\varphi = -\theta \ [2\pi]$. Ouf...

Définition 11

La rotation d'axe *dirigé et orienté* par f et d'angle θ sera par définition l'endomorphisme tel que pour toute b.o.n.d. $\mathcal{F}$ dont le premier vecteur est $\dfrac{f_1}{\|f_1\|}$:

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{F}} u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Remarques 18

- Pour savoir si une matrice A est dans $O_3(\mathbb{R})$, on regarde si "les trois vecteurs colonnes (c_1, c_2, c_3) forment une famille orthonormée". Lorsque c'est le cas, pour déterminer si $A \in SO_3(\mathbb{R})$, inutile de calculer le déterminant : il suffit de calculer $c_1 \wedge c_2$, qui vaut c_3 lorsque $A \in SO_3(\mathbb{R})$ et $-c_3$ sinon. En fait, le signe de la première composante (si ele est non nulle) permet de conclure !
- On a $R_{f,\theta} = R_{g,\varphi}$ si et seulement si :

  f et g sont positivement liés et $\theta = \varphi \ [2\pi]$

  ou

  f et g sont négativement liés et $\theta = -\varphi \ [2\pi]$
- Concrètement, pour déterminer les éléments propres (direction, angle) d'une rotation u donnée par sa matrice, on commence par déterminer sa direction $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$, son "angle non orienté" à l'aide de la trace. Ensuite, on oriente $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$ à l'aide d'un vecteur f. Pour déterminer le signe de θ (avec disons $\theta \in]-\pi, \pi]$), on peut prendre $g \in f^\perp$ (ce n'est guère difficile à construire) et comparer $u(g)$ et $f \wedge g$: *moralement* si $\theta \in]0, \pi[$, $u(g)$ sera "du coté de $f \wedge g$", et sinon "du coté de $-f \wedge g$", ce qui va se détecter en regardant le signe du produit scalaire $<u(g)|f \wedge g>$.

  Plus formellement : en notant $f_1 = f$, $f_2 = \dfrac{g}{\|g\|}$ et $f_3 = f_1 \wedge f_2$, les coordonnées respectives de $u(g)$ et $f \wedge g$ sont $\begin{pmatrix} 0 \\ \|g\|\cos\theta \\ \|g\|\sin\theta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \|g\| \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \|g\| \end{pmatrix}$ donc leur produit scalaire $\|g\|^2 \sin\theta$ est bien du signe de $\sin\theta$.

  On regardera avec intérèt la feuille Maple à ce sujet...

Exemple 2

Déterminons la nature géométrique précise de l'endomorphisme u de E dont la matrice dans une base orthonormée[4] *$\mathcal{E}$ est : $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.*

En notant c_1, c_2 et c_3 les trois colonnes de A, on vérifie sans mal : $\|c_1\|^2 = \|c_2\|^2 = \|c_3\|^2 = 1$ et $< c_1|c_2 > = < c_1|c_3 > = < c_2|c_3 > = 0$, donc $A \in O_3(\mathbb{R})$. On sait alors que $c_1 \wedge c_2$ vaut c_3 ou $-c_3$. Or : $c_1 \wedge c_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \times \\ \times \end{pmatrix}$, donc $c_1 \wedge c_2 = c_3$, et $A \in SO_3(\mathbb{R})$. Puisque c'est la matrice représentant u dans une b.o.n., u est donc une rotation. On détermine sa direction qui est $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$: on trouve $\mathbb{R}f$, avec $f = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

[4] pas forcément directe : on s'en fiche

dans $\mathcal{E}$. Le cosinus de l'angle est donné par $\operatorname{tr} u = 1 + 2\cos\theta = 2$ *donc* $\cos\theta = \frac{1}{2}$ *puis* $\theta = \pm\frac{\pi}{3}\cdot$ *Le vecteur* $g = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ *est dans* $f^\perp$. $f \wedge g = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ *et* $u(g) = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ *donc* $<f\wedge g|u(g)>= -3 < 0$, *donc* u *est la rotation d'axe dirigé et orienté par* f *et d'angle* $-\frac{\pi}{3}\cdot$

Remarque 19 Réciproquement, si on cherche la matrice dans une base orthonormée $\mathcal{E}$ (directe ou pas) de la rotation de direction/orientation et angle connu, on pourra prendre l'un des deux points de vue suivants (je n'ai pas de préférence) :

- On travaille dans une base adaptée et on fait un changement de base (se souvenir qu'une matrice de passage entre deux bases orthonormées n'est pas trop compliquée à inverser...). Bien entendu, par "base adaptée", on entend une b.o.n.d. dont le premier vecteur est sur l'axe : il suffit de normaliser le vecteur directeur de l'axe. Pour le second , on prend n'importe quel vecteur orthogonal au premier et de norme 1. Pour le troisième, il suffit de prendre le produit vectoriel des deux premiers !
- On retrouve rapidement le fait que si u est la rotation d'axe dirigé et orienté par x_0 de norme 1, alors :

  $$u(x) = <x|x_0>x_0 + \cos\theta(x - <x|x_0>x_0) + \sin\theta x_0 \wedge x$$

  (faire un dessin : la composante sur $\mathbb{R}x_0$ est le premier terme. La rotation sur la composante x_1 de x sur $x_0^\perp$ amène le terme $\cos\theta x_1 + \sin\theta x_0 \wedge x_1$...). Attention : si x_0 n'est pas de norme 1, il faut penser à le normaliser dans la formule précédente (voir par exemple la feuille Maple)...
  Ensuite, on peut calculer l'image de chaque membre de la base $\mathcal{E}$ ou bien utiliser les matrices des différentes applications intervenant dans la formule précédente : si $x_0 \leftrightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{E}$, la matrice de $x \mapsto <x|x_0>x_0$ sera $\begin{pmatrix}a^2 & ba & ca\\ ab & b^2 & cb\\ ac & bc & c^2\end{pmatrix}$ On calcule ensuite :

  $$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\c\\-b\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-c\\0\\a\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\-a\\0\end{pmatrix}$$

  de sorte que la matrice dans $\mathcal{E}$ de $x \mapsto x_0 \wedge x$ sera $\begin{pmatrix}0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{pmatrix}$.
  On note que les matrices antisymétriques représentent exactement les applications de la forme $x \mapsto x_0 \wedge x$ *dans les bases orthonormées.*

Exercice 12 *Donner la matrice A dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe dirigé et orienté par $e_1 + e_2 + e_3$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}\cdot$ Que vaut A^3 ?*

Solution : On trouvera comme Maple : $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$
Faites les deux calculs, pour pouvoir choisir celui qui vous convient le mieux.

Remarque 20 Ceux qui "voient dans l'espace" et/ou les champions de Rubiks Cube (un jeu qui a occupé vos ancètres dans un lointain passé...) n'avaient pas besoin de faire le moindre calcul !

3.4 Classification complète de $O(E)$ (HP)

Ce paragraphe est hors programme, mais il constitue un joli exercice : les techniques utilisées sont les mêmes que pour l'étude de $SO(E)$.

Contrairement à la dimension 2, les réflexions ne sont pas les seuls éléments de $O(E) \setminus SO(E)$.

PROPOSITION 10 *Si $u \in O(E) \setminus SO(E)$, alors ou bien u est une réflexion, ou bien (cas disjoints) c'est l'application $x \mapsto -x$, ou bien c'est la composée (commutative) d'une réflexion et d'une rotation d'axe orthogonal au plan de la réflexion, et d'angle dans $]0,\pi[$.*

PREUVE : Par des arguments similaires au début de la preuve sur la structure des rotations, on montrerait qu'il existe $f \neq 0$ tel que $u(f) = -f$. On a alors $H = f^{\perp}$ qui est u-stable, de sorte que u induit un endomorphisme orthogonal v de H. Pour une raison de déterminant, $v \in SO(E)$: c'est donc une rotation. On se place dans une b.o.n.d. $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ dont le premier vecteur est $f_1 = \dfrac{f}{\|f\|}$: la matrice de u dans $\mathcal{F}$ est alors de la forme $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ pour un certain $\varphi \in]-\pi,\pi]$. Si $\varphi = 0$, alors u est la réflexion par rapport à $f^{\perp}$. Si $\varphi = \pi$, alors $u = -\mathrm{Id}_E$, si $\varphi \in]0,\pi[$, on a :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

donc u est la composée de la réflexion par rapport à $f^{\perp}$ et de la rotation d'axe dirigé et orienté par f est d'angle φ. On vérifie sans mal que ce produit matriciel commute.
Enfin, si $\varphi \in]-\pi,0[$, on regarde la matrice de u dans $\mathcal{F}' = (-f_1, f_3, f_2)$, (qui est bien orthonormée directe) : c'est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ 0 & \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix}$$

et u est la composée (commutative) de la réflexion par rapport à $f^{\perp}$ et de la rotation d'axe dirigé et orienté par $-f$ et d'angle $-\varphi \in]0,\pi[$.
Le fait d'imposer $\theta \in]0,\pi[$ impose son unicité en regardant la trace de u... ■

REMARQUE 21 S'il faut identifier un tel endomorphisme u à partir de sa matrice dans une base orthonormée : on exclut facilement le cas $u = -\mathrm{Id}_E$. Ensuite, c'est une réflexion si et seulement sa matrice est symétrique (pourquoi ?). Si c'est le cas, on détermine l'hyperplan de la réflexion (ou son orthogonal) en calculant le noyau de $u - \mathrm{Id}_E$ (ou bien $u + \mathrm{Id}_E$). Sinon, on détermine $\ker(u + \mathrm{Id}_E)$ qui nous donne l'axe de rotation donc le plan de réflexion. Pour l'angle, on a le cos avec la trace, et le sin se calcule en orientant $\ker(u + \mathrm{Id}_E)$ puis en regardant l'image d'un élément de $\big(\ker(u + \mathrm{Id}_E)\big)^{\perp}$, un dessin étant comme toujours salutaire...

EXERCICE 13 *Montrer que la composée de deux réflexions est une rotation (préciser laquelle !) et que réciproquement, toute rotation peut se décomposer en composée de deux réflexions, “avec un degré de liberté dans le choix de la première”.*

EXERCICE 14 “De la vraie géométrie”
Reprendre la preuve de la proposition 10 en utilisant le résultat de l'exercice précédent pour établir l'existence d'un $v \neq 0$ envoyé sur son opposé.