Géométrie affine euclidienne

1 Problèmes de distances et d'angles

Exercice 1

- Déterminer la distance entre le point $M_1(1,2)$ et la droite D d'équation $2x+3y=4$ dans $\mathcal{E}_2$.
- Déteminer la distance entre le point $M_2(1,2,0)$ et le plan Π d'équation $2x+3y=4$ dans $\mathcal{E}_3$.
- Déteminer la distance entre le point $M_2(1,2,0)$ et le plan Π d'équation $2x+3y+100z=4$ dans $\mathcal{E}_3$.

Les résultats relatifs étaient-ils prévisibles ?

Exercice 2 Dans $\mathcal{E}_3$, déterminer la distance entre $A(1,1,1)$ et la droite de vecteur directeur $(1,2,-1)$ passant par $B(2,1,0)$.

Exercice 3 (*)
Dans $\mathcal{E}_3$, déterminer la perpendiculaire commune, ainsi que la distance entre les droites D_1 et D_2 d'équations respectives :

$$D_1 \left\{ \begin{array}{l} 2x+y+z=2 \\ x-y+z=1 \end{array} \right. \qquad D_2 \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=4 \end{array} \right.$$

(distance : $\dfrac{2}{\sqrt{13}}$).

Exercice 4 Donner les distances mutuelles entre D_i et D_j (pour $ieqj$), avec les droites de $\mathcal{E}_2$ d'équations respectives :

$$D_1 : x+2y=1; \qquad D_2 : 2x+y=5; \qquad D_3 \left\{ \begin{array}{l} x=2t+1 \\ y=-t+2 \end{array} \right.$$

Exercice 5 Dans $\mathcal{E}_3$, on considère le plan Π_1 d'équation $x+y+z=1$, la droite D_1 passant par $A(1,1,1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. Π_2 est le plan passant par $B(1,0,1)$ et contenant D_1. Enfin, D_2 est la droite passant par A et perpendiculaire à Π_1.

Déterminer les angles entre :

- D_1 et D_2 ;
- D_1 et Π_1 ;
- Π_1 et Π_2.

Exercice 6 Déterminer les lignes de niveaux dans le plan et dans l'espace des applications suivantes :

- $M \mapsto \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$ avec A, B fixés ;
- $M \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i M^2$ où les α_i sont des réels et les A_i des points fixés (faire intervenir un éventuel barycentre…).

2 Isométries (point de vue analytique)

EXERCICE 7 Donner une expression analytique de la rotation de centre $A(2,1)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, et de la réflexion d'axe $D : 2x+3y=1$. Donner de même les expressions complexes de ces isométries ($z'=f(z)$).

EXERCICE 8 Donner une expression analytique du retournement r_1 d'axe la droite D dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ passant par $A(1,2,3)$, de la réflexion r_2 par rapport au plan passant par A et orthogonal à D (réfléchir une seconde avant de calculer... on peut même faire un dessin).

EXERCICE 9 Donner une expression analytique de la rotation d'axe passant par $A(1,0,1)$, orienté par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 10
- Donner l'expression analytique dans le repère affine canonique de $\mathcal{E}_3$ de la réflexion envoyant $A(1,2,3)$ sur $B(3,2,1)$.
- Même chose avec un demi-tour envoyant A sur B (cette fois, il n'y a plus unicité ; il faut donc en choisir un particulier).

EXERCICE 11 Déterminer la nature géométrique des applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ euclidien données par leur forme analytique $M(x,y)\mapsto M'(x',y')$ suivantes :

$$\begin{cases} x'=-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\lambda \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+\mu \end{cases} \qquad \begin{cases} x'=\frac{1}{5}(-3x+4y+13) \\ y'=\frac{1}{5}(4x+3y+6) \end{cases}$$

EXERCICE 12 Même chose en dimension 3 :

$$\begin{cases} x'=-z+\alpha \\ y'=-x \\ z'=y-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'=-\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}z \\ y'=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+1 \\ z'=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+1 \end{cases}$$

3 Similitudes du plan

EXERCICE 13 Donner l'expression cartésienne et complexe de la similitude envoyant $A(1,1)$ sur $B(3,2)$ et $C(2,-1)$ sur l'origine. La caractériser géométriquement (centre, angle, rapport)

EXERCICE 14 Donner la nature géométrique de l'application de $\mathcal{E}_2$ dans lui-même :

$$M(x,y)\mapsto M'(x-\sqrt{3}y-2\sqrt{3},\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}).$$

EXERCICE 15 Existe-t-il toujours une similitude indirecte envoyant deux points donnés distincts A et B sur deux autres points donnés distincts A' et B' ? Unicité ?

4 Un peu de géométrie

Exercice 16
Considérons deux rotations $r_i = rot(\Omega_i, \theta_i)$, avec $\theta_1+\theta_2 eq 0\,[2\pi]$ (ce qui implique : $\dfrac{\theta_1}{2} eq -\dfrac{\theta_2}{2}\,[\pi]$, au passage...)

En décomposant r_1 et r_2 comme produits de symétries bien choisies, donner un moyen géométrique de trouver le centre de $r_1 \circ r_2$.

Exercice 17
Soient D une droite de $\mathcal{E}_2$ et r une rotation de $\mathcal{E}_2$ d'angle θ. Donner l'angle entre les droites D et $r(D)$.

Exercice 18
- Que dire de la composée de deux réflexions de $\mathcal{E}_3$?
- Et de deux retournements (1/2 tours) ?

Exercice 19 (*)
Etudier les déplacements qui commutent dans un espace affine euclidien de dimension 2.

Exercice 20 (**)
Même chose en dimension 3.

Exercice 21 On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des isométries du plan conservant globalement un triangle équilatéral ABC.

1. Montrer qu'il existe un point, noté O dans la suite, invariant par tous les éléments de $\mathcal{T}$.
2. Décrire les éléments de $\mathcal{T}$. On prouvera qu'il est constitué de 6 isométries dont 3 déplacements.

Exercice 22 (*)
Reprendre l'exercice précédent, avec cette fois les isométries de l'espace laissant invariant un tétraèdre régulier. On trouvera 24 isométries, dont 12 déplacements.

Exercice 23 Montrer que les hauteurs (resp. médiatrices, bissectrices) d'un (vrai) triangle sont concourantes.
Calcul ou géométrie : choisissez !

Exercice 24 (*)
Soit D une droite du plan. Déterminer l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}_2$ conservant globalement D *(on pourra par exemple commencer par traiter le cas des isométries admettant un point fixe sur D, puis s'y ramener, comme toujours !).*

On trouvera des translations, des réflexions, des symétries glissées, et même quelques rotations bien particulières...

Exercice 25 (*)
Reprendre l'exercice précédent dans l'espace. *On pourra se limiter aux déplacements, et on trouvera les rotations/vissages d'axe D, et des retournements d'axe perpendiculaire à D.*

Exercice 26 (**)
Déterminer l'ensemble des isométries conservant globalement la réunion de deux droites D_1 et D_2 données. *On commencera par l'étude dans le plan, puis l'étude dans l'espace lorsque les droites sont coplanaires. Pour le cas "générique" dans l'espace, on notera P_i le point d'intersection de D_i avec Δ la perpendiculaire commune à D_1 et D_2 et on montrera que le centre de $[P_1P_2]$ est point fixe de telles isométries.*

Exercice 27 Montrer que l'ensemble des triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ soit orthogonale est la réunion de deux cercles.

On pourra évaluer $(a+b+c)^2$.