Géométrie dans les “petits” espaces affines euclidiens

Table des matières

- Dans tout ce chapitre, on considère des espaces affines $\mathcal{E}$ *euclidiens*, c'est-à-dire tels que le espace vectoriel sous-jacent est muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$, et de sa norme associée $\|.\|$. Cela permet de définir une *distance* sur $\mathcal{E}$, en posant, pour $A, B \in \mathcal{E}$: $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$ (notée généralement AB). Notons que le produit scalaire sera généralement noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ plutôt que $<\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}>$.
- Rappel : on définit également une *distance algébrique* sur une droite D **orientée par** $\overrightarrow{u}$ vecteur directeur de D de norme 1, en posant, pour $A, B \in D$, $\overline{AB}$ l'unique scalaire tel que $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\overrightarrow{u}$.
- Lorsque ce n'est pas précisé, O désigne l'origine d'un repère affine $(O, f_1, \ldots, f_n)$.

Définition 1
Deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ sont dits *orthogonaux* lorsque leurs directions sont des sous-espaces orthogonaux, et *perpendiculaires* lorsque les orthogonaux des directions sont orthogonaux!!!

La perpendicularité peut sembler une notion vide de sens... mais on va comprendre sur des exemples qu'en fait... c'est à peu près le cas!

Exemples 1
- *Deux droites seront orthogonales lorsque leurs vecteurs directeurs le sont. En dimension 2, ceci est équivalent à dire qu'elles sont perpendiculaires. Par contre, en dimension 3, deux droites ne peuvent jamais être perpendiculaires (les orthogonaux ont pour dimension 2, donc s'intersectent de façon non triviale, donc ne peuvent être orthogonaux entre eux...).*
- *Deux plans de $\mathcal{E}_3$ ne peuvent jamais être orthogonaux, mais par contre peuvent être perpendiculaires, lorsque leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.*
- *Pour un plan et une droite de $\mathcal{E}_3$, il y a équivalence entre orthogonalité et perpendicularité; pourquoi?*

Exercice 1 *Montrer que deux plans Π_1 et Π_2 de $\mathcal{E}_3$ sont perpendiculaires si et seulement s'il existe $A \in \mathcal{E}$ et une base orthonormée de E $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ tels que $\Pi_1 = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $\Pi_2 = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$.*

1 Problèmes de distance

Les formules mystérieuses de ce chapitre doivent pouvoir être retrouvées RAPIDEMENT, putôt qu'apprises BETEMENT (et avec erreurs...).

1.1 Equation normale d'un hyperplan

Définition 2
Un *hyperplan affine* est un sous-espace de dimension $\dim \mathcal{E} - 1$.

Fait 1 *Si $A \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{u} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{H}$ des $M \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = \lambda$ est un hyperplan affine de direction $\overrightarrow{u}^{\perp}$.*

Preuve : Tout d'abord, $\mathcal{H}$ n'est pas vide puisqu'il contient $A + \dfrac{\lambda}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}$. Ensuite, si on prend un point M_0 de $\mathcal{H}$ (n'importe lequel), on a $\overrightarrow{AM_0}.\overrightarrow{u} = \lambda$, donc (par soustraction) : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = \lambda$ si et seulement si $\overrightarrow{M_0M}.\overrightarrow{u} = 0$, ce qui est équivalent à : $M \in M_0 + \overrightarrow{u}^{\perp}$. ■

Fait 2 *Soient $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de $\mathcal{E}$, $A \in \mathcal{E}$, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de la droite vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{H}}^{\perp}$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que :*

$$\mathcal{H} = \left\{ M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = \lambda \right\}.$$

Ainsi, $M \in \mathcal{E}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = \lambda$: on parle d'équation normale *de $\mathcal{H}$.*

Preuve : On prend M_0 un point quelconque de $\mathcal{H}$, et on pose $\lambda = \overrightarrow{AM_0}.\overrightarrow{u}$. On obtient le résultat voulu, puisque $\mathcal{H} = M_0 + \overrightarrow{u}^{\perp}$. ■

REMARQUE 1 En se plaçant dans un repère affine, les équations normales sont de la forme $u_1x_1 + \cdots + u_nx_n = K$.

EXEMPLES 2

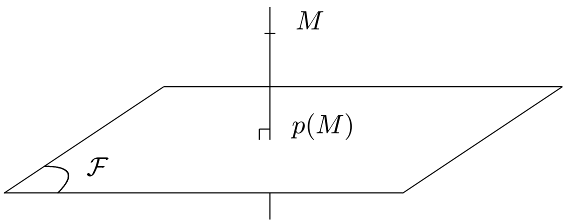
- *Soit D la droite de $\mathcal{E}_2$ passant par $A(3,-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ (notations volontairement distinctes des énoncés précédents).*
  Un vecteur normal à D est $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. Une équation normale de D est donc $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{v}$, soit encore : $-2x + y = -7$.
- *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $\Pi = A(1,2,3) + \mathrm{Vect}\big((1,2,0),(0,1,2)\big)$. On obtient un vecteur normal en prenant le produit vectoriel des deux vecteurs de base de $\overrightarrow{\Pi}$, soit $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$, d'où l'équation normale :*

$$\Pi : 4x - 2y + z = 3.$$

1.2 Distance d'un point à un hyperplan affine

DÉFINITION 3
La projection orthogonale sur un sous-espace affine $\mathcal{F}$ est la projection affine sur $\mathcal{F}$ dans la direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$, ce qui a bien un sens car $E = \overrightarrow{\mathcal{F}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$ (on est en dimension finie).

RAPPEL : Par définition, $p(M)$ est l'unique point $M' \in \mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{M'M} \perp \overrightarrow{\mathcal{F}}$.



PROPOSITION 1 *Si $M \in \mathcal{E}$, l'ensemble des MF, pour $F \in \mathcal{F}$, admet un* minimum, *qui est MP, où P est la projection orthogonale de M sur $\mathcal{F}$. Ce minimum est appelé la* distance *de M à $\mathcal{F}$, et est noté $d(M,\mathcal{F})$.*

PREUVE : Pythagore… ■

Voyons comment cela se passe en pratique, d'abord pour des hyperplans :

PROPOSITION 2 *Soit D une droite de $\mathcal{E}_2$ d'équation affine $ax + by = c$. et soit $M(x_M, y_M) \in \mathcal{E}_2$. Alors :*

$$d(M,D) = \frac{|ax_M + by_M - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

PREUVE : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D, et $M'(x',y') = p(M)$ est tel que $\overrightarrow{MM'} // \overrightarrow{u}$, si bien que :

$$d = M'M = \frac{\left|\overrightarrow{M'M}.\overrightarrow{u}\right|}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left|a(x_M - x') + b(y_M - y')\right|,$$

et on conclut grâce au fait que $ax' + by' = c$, puisque $M' \in D$. ■

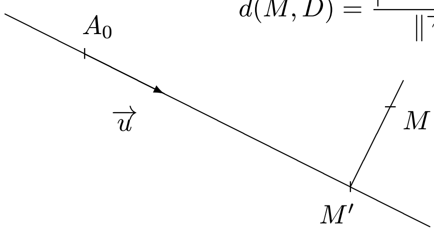
REMARQUE 2 Pour se souvenir de la formule :

- Il faut des valeurs absolues pour avoir quelque chose de positif !
- La distance est nulle si et seulement si $M \in D$, ce qui correspond à la condition $ax_M + by_M = c$ (d'où le numérateur).
- Le dénominateur peut se retrouver par homogénéité, puisqu'on obtient d'autres équations normales en en multipliant une première par une constante K, ce qui correspond à prendre un nouveau vecteur normal multiplié d'autant.

EXEMPLE 3 *La distance de $A(1,3)$ à la droite d'équation $y = 2x - 3$ est* $\dfrac{|2-3-3|}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

REMARQUE 3 Si D est donné par un point A_0 et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, on peut obtenir directement (sans passer par une équation de D) la distance de M à d en notant que si M' est la projection orthogonale de M sur D, alors $\left|[\overrightarrow{A_0M}, \overrightarrow{u}]\right| = \left|[\overrightarrow{M'M}, \overrightarrow{u}]\right| = M'M \|\overrightarrow{u}\|$, de sorte que :

$$d(M,D) = \frac{\left|[\overrightarrow{A_0M}, \overrightarrow{u}]\right|}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$



Dans le même esprit, on montrera en dimension 3 :

PROPOSITION 3 *Soit Π un plan de $\mathcal{E}_3$ d'équation cartésienne $ax+by+cz = d$. et soit $M(x_M, y_M, z_M) \in \mathcal{E}_3$. Alors :*

$$d(M,\Pi) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

REMARQUE 4 Si on a une base de $\overrightarrow{\Pi}$, on récupère un vecteur normal en faisant un produit vectoriel.

1.3 Distance d'un point à une droite de l'espace

PROPOSITION 4 *On suppose que D est une droite de $\mathcal{E}_3$ donnée par l'un de ses points M_0 et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Alors $d(M,D) = \dfrac{\|\overrightarrow{M_0M} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|u\|}$.*

PREUVE : $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0M'} + \overrightarrow{M'M} = \lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{M'M} \ldots$ ∎

EXEMPLE 4 *La distance de $M(1,2,3)$ à D* $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-2t \\ z = 1+t \end{cases}$ *vaut* $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

REMARQUE 5 Si D est donnée comme intersection de deux plans Π_1 et Π_2 non parallèles, par des équations $\varphi_i(M) = K_i$, où φ_1 et φ_2 sont deux formes linéaires non colinéaires, on peut chercher λ tel que le plan Π_3 d'équation $(\lambda\varphi_1 + \varphi_2)(M) = \lambda K_1 + K_2$ soit perpendiculaire à Π_1. On a alors $D = \Pi_1 \cap \Pi_3$, et par Pythagore : $d(M,D)^2 = d(M,\Pi_1)^2 + d(M,\Pi_3)^2$.

A titre d'exercice, on pourra reprendre l'exemple précédent, en définissant D comme intersection d'hyperplans : $\begin{cases} x+2y+3z = 11 \\ x - z = 1 \end{cases}$

1.4 Distance entre deux sous-espaces affines

Si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont deux sous-espaces affines, on peut montrer en toute généralité que l'ensemble des distances M_1M_2, pour $M_1 \in \mathcal{F}_1$ et $\mathcal{M}_2 \in \mathcal{F}_2$, admet un minimum, que l'on appelle distance entre $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, et que l'on note $d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. On va s'intéresser dans cette partie au sous-espaces de $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$.

EXERCICE 2 *Comment déterminer la distance entre deux droites de $\mathcal{E}_2$?*

PROPOSITION 5 *Soient D_1 et D_2 deux droites de $\mathcal{E}_3$, de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. Alors M_1M_2 admet un minimum lorsque M_1 et M_2 décrivent respectivement D_1 et D_2 :*

- *si $D_1 // D_2$, ce minimum est pris pour une infinité de couples (A, B), et vaut $\dfrac{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{M_1M_2}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$, où $\overrightarrow{u}$ dirige les deux droites, et M_1 et M_2 sont des points quelconques de D_1 et D_2 ;*
- *sinon, ce minimum est atteint en un unique couple (A, B), et vaut*

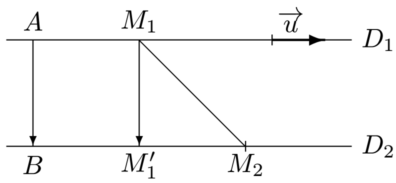
$$d(D_1, D_2) = \frac{\left|[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}]\right|}{\|\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\|},$$

  pour tout $M_1 \in D_1$ et $M_2 \in D_2$.
  Plus précisément, il existe une unique droite Δ orthogonale à D_1 et D_2, intersectant l'une et l'autre en des points A et B, et $d(M_1, M_2) = AB$.

REMARQUE 6 Dans le deuxième cas, on parle abusivement de *perpendiculaire* commune.

PREUVE :

- Si $D_1 // D_2$, fixons $A \in D_1$, et posons B le projeté orthogonal de A sur D_2. On va montrer que AB est un minorant des M_1M_2 (et c'est donc un minimum).
  Soient donc $M_1 \in D_1$ et $M_2 \in D_2$. On définit $M_1' = M_1 + \overrightarrow{AB}$:



$$M_1' = A + \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AB} = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM_1} = B + \overrightarrow{AM_1} = B + \lambda\overrightarrow{u} \in D_2;$$

  comme de plus $\overrightarrow{MM'} \perp D_2$, M_1' est donc le projeté orthogonal de M_1 sur D_2, de sorte que $M_1M_2^2 = M_1M_1'^2 + M_1'M_2^2$. Il reste à constater que $M_1M_1' = AB$, et on en déduit : $M_1M_2 \geq AB$.
- Dans le cas où D_1 et D_2 ne sont pas parallèles, on va commencer par montrer le

  LEMME 1 *Il existe une unique droite Δ orthogonale à D_1 et D_2 et qui intersecte ces deux droites.*

  PREUVE : On décrit les deux droites par $P_1(t_1) = A_1 + t_1\overrightarrow{u_1}$ et $P_2(t_2) = A_2 + t_2\overrightarrow{u_2}$ (A_1 et A_2 sont des points fixés de D_1 et D_2). On cherche finalement les éventuels couples (t_1, t_2) tels que $\big(P_1(t_1)P_2(t_2)\big)$ soit orthogonale à D_1 et D_2, ce qui revient à dire : $\overrightarrow{P_1P_2}.\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{P_1P_2}.\overrightarrow{u_2} = 0$, soit encore :

$$\begin{cases} -\|u_1\|^2 t_1 & + & <\overrightarrow{u_1}|\overrightarrow{u_2}> t_2 & = & \overrightarrow{A_2A_1}.\overrightarrow{u_1} \\ - <\overrightarrow{u_1}|\overrightarrow{u_2}> t_1 & + & \|u_2\|^2 t_2 & = & \overrightarrow{A_2A_1}.\overrightarrow{u_2} \end{cases}$$

  Ce système a pour déterminant $D = -\|\overrightarrow{u_1}\|^2\|\overrightarrow{u_2}\|^2 + (\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2})^2$. Or $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est libre, donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est stricte, donc $D < 0$, et on obtient une unique solution. ■

Maintenant, considérons $M_1 \in D_1$ et $M_2 \in D_2$: $\overrightarrow{P_1P_2}$ est orthogonal à $\overrightarrow{M_1P_1}$ et à $\overrightarrow{P_2M_2}$, donc à leur somme, ce qui permet d'écrire grâce à notre ami Pythagore : $M_1M_2^2 = P_1P_2^2 + \|\overrightarrow{M_1P_1} + \overrightarrow{P_2M_2}\|^2$, et $M_1M_2 \geq P_1P_2$, avec égalité si et seulement si $\overrightarrow{M_1P_1} + \overrightarrow{P_2M_2} = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire (liberté) $\overrightarrow{M_1P_1} = \overrightarrow{P_2M_2} = \overrightarrow{0}$, soit encore : $M_1 = P_1$ et $M_2 = P_2$.
Il reste à justifier la formule donnée dans l'énoncé, en utilisant le caractère alterné du déterminant et la définition du produit vectoriel :

$$\left|[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}]\right| = \left|[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}]\right| = \left|<\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}|\overrightarrow{P_1P_2}>\right| = P_1P_2\|\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\|$$

car $\overrightarrow{P_1P_2}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$, donc colinéaire à $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$.

■

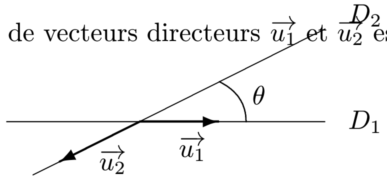
EXERCICE 3 *Comment déterminer la distance entre une droite et un plan (resp. deux plans) de l'espace ?*

1.5 Questions d'angles

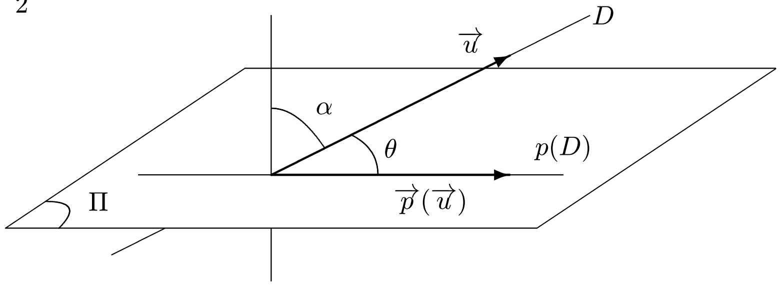
On connait déjà la notion d'angle (orienté dans le plan, non orienté dans l'espace) entre deux vecteurs. On va maintenant définir les angles entre sous-espaces affines. Il s'agit d'angles non orientés, toujours dans $[0, \pi/2]$. En fait, on ne s'intéresse qu'aux *directions* des espaces affines en jeu.

DÉFINITION 4

- L'angle entre deux droites affines de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ est $\arccos \dfrac{|<\overrightarrow{u_1}|\overrightarrow{u_2}>|}{\|\overrightarrow{u_1}\|\|\overrightarrow{u_2}\|}$.



  Sur cet exemple, θ est l'angle orienté entre $\overrightarrow{u_1}$ et $-\overrightarrow{u_2}$...
- L'angle entre une droite D de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et un plan Π est l'angle non orienté entre D et sa projection orthogonale sur Π. *Il s'agit en fait de l'angle non orienté entre $\overrightarrow{u}$ et sa projection orthogonale sur $\overrightarrow{\Pi}$, ou encore $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$, où α est l'angle entre D et $\overrightarrow{\Pi}^{\perp}$.*



- L'angle entre deux plans Π_1 et Π_2 est l'angle non orienté entre leurs normales.

EXEMPLES 5
On considère les droites et plans $D_1 \begin{cases} x = 1515 + 2t \\ y = 1024 - t \\ z = 512 + t \end{cases}$, $\Pi_1 : x + y + z = -256$, $\Pi_2 : x - y - 2z = 128$, *et* $D_2 = \Pi_1 \cap \Pi_2$.

Un vecteur directeur de D_1 est $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; un vecteur normal de Π_1 est $\overrightarrow{v_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal de Π_2 est $\overrightarrow{v_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, si bien que le vecteur $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est à la fois dans $\overrightarrow{\Pi_1}$ et dans $\overrightarrow{\Pi_2}$, donc est directeur de D_2. Ainsi :

- *L'angle entre* D_1 *et* D_2 *est* $\arccos \frac{\sqrt{21}}{6}\cdot$
- *Celui entre* D_1 *et* Π_1 *vaut* $\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot$
- *Celui entre* D_1 *et* Π_2 *vaut biiiiiip.*
- *Celui entre* D_2 *et* Π_1 *(resp.* Π_2*) vaut biiiiiip.*
- *Celui entre* Π_1 *et* Π_2 *vaut* $\arccos \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot$

2 Isométries du plan

2.1 Généralités et exemples

Le début de ce paragraphe établit des généralités sur les isométries. Il n'est pas spécifique à la dimension 2.

Définition 5
Une *isométrie* de $\mathcal{E}$ est une application f affine de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui conserve les distances :

$$\forall M, N \in \mathcal{E}, \qquad f(M)f(N) = MN.$$

Proposition 6
- *f est une isométrie de E si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est un endomorphisme orthogonal de E.*
- *Les isométries sont bijectives, de bijections réciproques des isométries.*

Preuve : Le deuxième point est conséquence du premier, et de la caractérisation des applications affines bijectives (on se souvient par ailleurs qu'en dimension finie, les endomorphismes orthogonaux sont bijectifs car injectifs).

Supposons donc que f est une isométrie, et montrons que $\overrightarrow{f}$ est orthogonale. Il suffit pour cela de montrer que $\overrightarrow{f}$ conserve la norme. On prend donc $\overrightarrow{u} \in E$. Si on choisit un point $\Omega \in \mathcal{E}$ et on définit $\Omega' = \Omega + \overrightarrow{u}$, on peut écrire $\overrightarrow{f(\Omega)f(\Omega')} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\Omega\Omega'})$, et comme f est une isométrie, on obtient :

$$\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{\Omega\Omega'}\| = \Omega\Omega' = f(\Omega)f(\Omega') = \|\overrightarrow{f(\Omega)f(\Omega')}\| = \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\|,$$

et $\overrightarrow{f} \in O(E)$.

Réciproquement, supposons $\overrightarrow{f} \in O(E)$, et fixons $A, B \in \mathcal{E}$. On peut écrire :

$$f(A)f(B) = \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB,$$

et f est bien une isométrie. ■

Remarque 7 Bien entendu, il est essentiel d'être en dimension finie, puisqu'on sait qu'en dimension infinie, on peut trouver des endomorphismes orthogonaux qui ne sont pas surjectifs.

Définition 6
Un *déplacement* de $\mathcal{E}$ est une isométrie f telle que $\overrightarrow{f} \in SO(E)$ (c'est-à-dire : $\overrightarrow{f}$ a pour déterminant 1). Les autres isométries sont appelés *antidéplacements*. On parle également parfois d'isométries positives/négatives.

On montrera sans mal la :

Proposition 7 *Muni de la loi de composition des applications, l'ensemble $Iso(\mathcal{E})$ des isométries de $\mathcal{E}$ constitue un groupe.*

L'ensemble $Iso^+(\mathcal{E})$, ou $Dep(\mathcal{E})$ des déplacements de $\mathcal{E}$ constitue un sous-groupe de $Iso(\mathcal{E})$.

On s'intéresse maintenant spécifiquement aux isométries du plan.

Exemples 6

- *Les translations sont des déplacements (leur partie linéaire est l'identité).*
- *Les réflexions sont des antidéplacements.*
- *Les symétries par rapport à un point sont des déplacements du plan (dans l'espace, il s'agit d'antidéplacements ; pourquoi ?)*
- *Si on fixe $\Omega \in \mathcal{E}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on définit la* rotation affine *de centre Ω et d'angle θ par :* $r(M) = \Omega + R_\theta(\overrightarrow{\Omega M})$, *où R_θ est la rotation vectorielle d'angle θ (il s'agit de l'endomorphisme de E dont la matrice dans toute bond vaut $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$). Le lecteur vérifiera qu'il s'agit d'un déplacement...*

Exercice 4 *Les déplacements conservent les angles orientés ; les antidéplacements les inversent.*

On donne enfin un résultat affine dont on avait déjà vu la version vectorielle. La preuve est laissée au lecteur.

Fait 3 *Si A et B sont deux points distincts de $\mathcal{E}_2$, il existe une unique réflexion envoyant A sur B.*

Ce résultat reste valable en dimension (finie) quelconque.

2.2 Classification des déplacements du plan

Proposition 8 *Les déplacements du plan sont les translations et les rotations.*

Preuve : Soit φ un déplacement du plan affine euclidien $\mathcal{P}$.

- Si $\overrightarrow{\varphi} = \mathrm{Id}_E$, on sait que φ est une translation.
- Sinon : $\overrightarrow{\varphi}$ est une rotation vectorielle R_θ, avec $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, donc $\overrightarrow{\varphi} - \mathrm{Id}_E$ est injectif, donc bijectif. On sait alors que φ admet un unique point fixe (c'est un résultat concernant les applications affines, que le lecteur montrera en fixant $A \in \mathcal{P}$, et en cherchant un point fixe Ω sous la forme $\Omega = A + \overrightarrow{u}$).
  Maintenant, si on nomme Ω ce point fixe, on a pour tout $M \in \mathcal{P}$: $\varphi(M) = \varphi(\Omega) + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{\Omega M}) = \Omega + R_\theta(\overrightarrow{\Omega M})$, et φ est la rotation affine de centre Ω et d'angle θ.

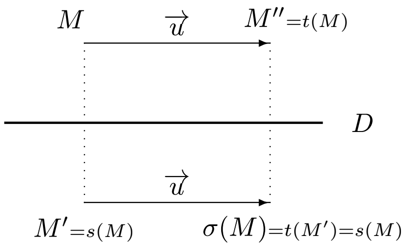
■

2.3 Les antidéplacements (± HP)

Définition 7

Une *symétrie glissée* est la composée d'une réflexion par rapport à une droite D, et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ parallèle à D (i.e. : $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$).

Proposition 9 *Une symétrie glissée est un antidéplacement sans point fixe (sauf lorsque la translation est de vecteur nul). De plus, il y a unicité de la droite par rapport à laquelle on fait la symétrie et du vecteur de translation ; et enfin la symétrie et la translation commutent.*



Preuve :

- La symétrie glissée $\sigma = s_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$ a pour partie linéaire $\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{s_D} \circ \overrightarrow{t_{\overrightarrow{u}}} = \overrightarrow{s_D}$; c'est donc un antidéplacement. Supposons que $\sigma(M) = M$, et notons $M' = t_{\overrightarrow{u}}(M)$: D'une part, $\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{M's_D(M')} \perp \overrightarrow{D}$, et d'autre part $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} \in D$. Cela impose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- Pour montrer que $\sigma_1 = s_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$ et $\sigma_2 = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_D$ sont égales, on constate d'abord qu'elles ont même partie linéaire, et qu'elles coïncident en un point (prendre un point de D).
- Si $s_{D_1} \circ t_{\overrightarrow{u_1}} = s_{D_2} \circ t_{\overrightarrow{u_2}}$: on a alors $s_{D_1} = s_{D_2} \circ t_{\overrightarrow{u_2}-\overrightarrow{u_1}}$. La symétrie glissée $s_{D_2} \circ t_{\overrightarrow{u_2}-\overrightarrow{u_1}}$ admet donc des points fixes (la droite D_1), donc $\overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{0}$, puis $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u_1}$, puis $s_{D_1} = s_{D_2}$, et enfin $D_1 = D_2$ (pourquoi ?).

■

En fait, on vient de décrire l'intégralité des antidéplacements LORSQU'ON EST EN DIMENSION 2.

PROPOSITION 10 *Les antidéplacements du plan sont exactement les symétries glissées.*

PREUVE : Soit σ un antidéplacement de $\mathcal{P}$. $\overrightarrow{\sigma}$ est une réflexion de E, par rapport à une droite, disons $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$.

- Si σ admet un point fixe Ω, alors σ et la réflexion d'axe $\Omega + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ coïncident en un point et ont même partie linéaire : elles sont donc égales.
- Sinon, fixons $A \in \mathcal{P}$, posons $A' = \sigma(A)$, et considérons $t_{\overrightarrow{A'A}} \circ \sigma$: il s'agit d'un antidéplacement admettant un point fixe (A), donc d'une réflexion par rapport à une certaine droite Δ, d'après ce qui précède. Ainsi, $\sigma = t_{\overrightarrow{AA'}} \circ s_\Delta$ (ce n'est pas fini : $\overrightarrow{AA'}$ n'est pas nécessairement dans $\overrightarrow{\Delta}$).
  Décomposons $\overrightarrow{AA'}$ sous la forme $\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, avec $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, de sorte que $\sigma = t_{\lambda\overrightarrow{u}} \circ (t_{\overrightarrow{v}} \circ s_\Delta)$. Si on se souvient de ce qu'on a fait en terminale ou si on patiente quelques lignes, on saura que $t_{\overrightarrow{v}} \circ s_\Delta$ est une réflexion par rapport à une droite D parallèle à Δ (la condition $\overrightarrow{v} \perp \Delta$ est ici essentielle). On a alors $\sigma = t_{\lambda\overrightarrow{u}} \circ s_D$, avec $\lambda\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$: il s'agit bien d'une symétrie glissée.

■

2.4 Calculs pratiques

- Si A est point fixe de φ, on a pour tout $M \in \mathcal{E}$: $\varphi(M) = \varphi(A) + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AM}) = A + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AM})$, et on est ramené à un problème linéaire ("vu depuis A").
- Si φ n'admet pas de point fixe : il s'agit alors d'une translation (pas trop difficile...) ou d'une symétrie glissée ; on est alors ramené à deux cas précédents.

Il est également toujours possible de faire un changement de repère affine. On donne différents types de calcul dans ce qui suit.

EXEMPLE 7 *$\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. $\Omega(2, -1)$, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. r désigne la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{Pi}{3}$, s la réflexion par rapport à $\Delta = \Omega + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$, et $\sigma = t_{-\overrightarrow{u}} \circ s$.*

- *$r(M) = \Omega + R_{\pi/3}(\overrightarrow{\Omega M}) = M_1(x_1, y_1)$ devient :*

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} + \frac{3}{2} \end{aligned}\right.$$

- *Pour calculer $s(M) = M_2(x_2, y_2)$, on peut écrire $s(M) = \Omega + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{\Omega}M)$, et calculer $\overrightarrow{s}$ en faisant un changement de bases (orthonormées...). On peut également noter que M_2 est le seul point tel que le milieu de $[MM_2]$ (une équation normale de D étant $x - 2y = 4$) soit dans D et $\overrightarrow{MM_2} \perp \overrightarrow{u}$, ce qui* *conduit à un système linéaire de deux équations à deux inconnues, que l'on résoud en :*

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{5}(3x+4y+8) \\ y_2 = \dfrac{1}{5}(4x-3y-16) \end{cases}$$

- *Pour déterminer $M_3(x_3, y_3) = \sigma(M)$, on peut bien entendu utiliser ce qui précède, pour obtenir le résultat instantanément. Partons plutôt de zéro, et travaillons dans le repère affine orthogonal $\mathcal{R}' = (\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, avec $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. Si $M(X,Y)_{\mathcal{R}'}$, alors $M_3(X',Y')_{\mathcal{R}'}$, avec $X' = X-1$ et $Y' = -Y$. Il reste à relier les coordonnés (a,b) dans $\mathcal{R}$ et celles (A,B) dans $\mathcal{R}'$ d'un point P quelconque de $\mathcal{P}$: on a $\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} = \overrightarrow{O\Omega} + A\overrightarrow{u} + B\overrightarrow{v}$, donc $\begin{cases} a = 2+2A-B \\ b = -1+A+2B \end{cases}$, puis $\begin{cases} A = \dfrac{1}{5}(2a+b-3) \\ B = \dfrac{1}{5}(2b-a+4) \end{cases}$*

  En appliquant ces formules à M et $\sigma(M)$, on obtient :

$$\begin{cases} x_3 = 2+2X'-Y' = 2X+Y = \dfrac{1}{5}(3a+4b-2) \\ y_2 = -1+X'+2Y' = -2+X-2Y = \dfrac{1}{5}(4x-3y-21) \end{cases}$$

***BIEN ENTENDU**, on vérifie ses calculs en prenant l'image de Ω… voire l'image de O. On peut également vérifier la trace de la partie linéaire, etc…*

2.5 Composition d'isométries

Les groupes $O^+(E)$ et $O^-(E)$ étant simplissimes en dimension 2, la situation est relativement aisée à décrire.

PROPOSITION 11

- *La composée de deux translations est une translation.*
- *La composée d'une translation et d'une rotation d'angle $\theta \neq 0[2\pi]$ est une rotation d'angle θ (de centre différent, sauf si la translation est l'identité).*
- *La composée de deux rotations d'angles respectifs θ_1 et θ_2 est une rotation d'angle $\theta_1+\theta_2$ si cette somme est $\neq 0[2\pi]$, et une translation sinon.*
- *La composée d'une réflexion et d'une rotation est une réflexion d'axe… l'ensemble de ses points fixes ! (précisions en khôlles !)*
- *La composée de deux réflexions est une translation lorsque les deux axes sont parallèles, et une rotation sinon.*

PREUVE : Essentiellement, on regarde la partie linéaire et on recherche d'éventuels points fixes… ■

REMARQUE 8 La recherche géométrique des éléments caractéristiques de composées est un bon exercice de géométrie (parfois fait en terminale), qui constitue une question facile et “filtrante” pour le khôlleur…

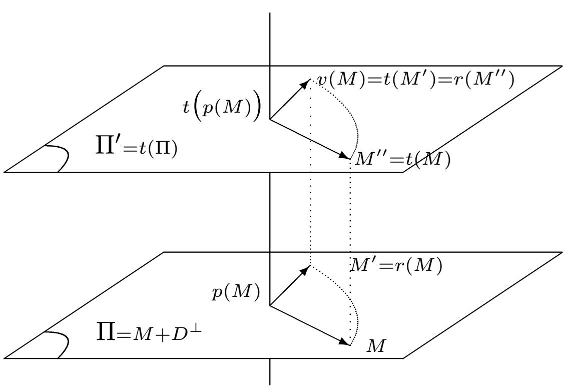
3 Isométries de l'espace

$Iso(\mathcal{E})$ et $Iso^+(\mathcal{E})$ sont définis de la même façon qu'en dimension 2, et ont les même propriétés élémentaires. On va cependant trouver dans ces groupes des spécimens nouveaux…

3.1 Quelques exemples

- Les translations sont des déplacements de $\mathcal{E}_3$.

- Si D est une droite dirigée par $\overrightarrow{u}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, la rotation d'axe D dirigé par $\overrightarrow{u}$ et d'angle θ est par définition l'application r qui à $M \in \mathcal{E}$ associe $M' + R(\overrightarrow{M'M})$, où M' est la projection orthogonale de M sur D, et R la rotation (vectorielle) d'axe dirigé par $\overrightarrow{u}$ et d'angle θ. On vérifie sans mal que si on fixe $\Omega \in D$, on a également pour tout $M \in \mathcal{E}$: $\Omega + R(\overrightarrow{\Omega M})$ (la raison étant que $\overrightarrow{D} = \ker(R - \mathrm{Id}_E)$). On en déduit que r est affine, de partie linéaire R : c'est donc un déplacement.
- Si on compose une rotation et une translation de vecteur colinéaire à l'axe de la rotation, on obtient un *vissage*. On montre sans mal (exercice) que la composition est ici commutative, et qu'il y a unicité de la rotation et du vecteur de translation. Les vissages sont des déplacements (même partie linéaire que la rotation).



- Les réflexions sont des isométries négatives.
- Les symétries centrales sont également des isométries négatives (contrairement à ce qui se passe dans le plan, où les symétries centrales sont... des rotations d'angle π).
- La composée d'une réflexion et d'une rotation de vecteur inclus dans la direction du plan de réflexion s'appelle une symétrie glissée : c'est une isométrie négative.

3.2 Classification des déplacements de l'espace

La classification de $Iso^+(\mathcal{E}_3)$ est très simple :

Proposition 12 *$Iso^+(\mathcal{E}_3)$ est constitué uniquement des vissages (au sens large, c'est-à-dire en incluant les rotations et translations...).*

Preuve : Soit f un déplacement de $\mathcal{E}_3$. On va comme toujours regarder ce qui se passe si f admet un point fixe.

- On commence par établir le :

  Lemme 2 *Si $\varphi \in Iso(\mathcal{E}_3)$ distincte de l'identité admet un point fixe, alors φ est une rotation dont la direction de l'axe est $\ker(\overrightarrow{\varphi} - \mathrm{Id}_E)$.*

  Preuve : On sait que $\overrightarrow{\varphi}$ est une rotation (vectorielle) R d'axe $\ker(\overrightarrow{\varphi} - \mathrm{Id}_E) = \mathbb{R}\overrightarrow{u}$. Soit Ω un point fixe de φ :
  $$\varphi(M) = \varphi(\Omega) + \overrightarrow{\varphi}(\Omega M) = \Omega + R(\overrightarrow{\Omega M}),$$
  et φ est bien une rotation d'axe $\Omega + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$. ■

- Reprenons notre déplacement f : si $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}_E$, alors f est une translation.
- Supposons maintenant que $\overrightarrow{f} \neq \mathrm{Id}_E$: il s'agit donc d'une rotation (vectorielle) R d'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$. f est donc distincte de l'identité.
  Si f admet un point fixe, c'est gagné d'après le lemme. Sinon, on fixe $A \in \mathcal{E}_3$, on pose $A' = f(A)$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AA'}$, et $g = t_{-\overrightarrow{v}} \circ f$: g est une isométrie qui admet A pour point fixe : il s'agit donc d'une rotation affine r d'axe $D = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$. Maintenant, $f = t_{\overrightarrow{v}} \circ r = t_{\lambda\overrightarrow{u}} \circ (t_{\overrightarrow{w}} \circ r)$, où on a décomposé $\overrightarrow{v}$

selon $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}^\perp$: $\overrightarrow{v} = \lambda u + \overrightarrow{w}$. On termine en notant que $t_{\overrightarrow{w}} \circ r$ est une rotation d'axe parallèle à D (anticipation sur le paragraphe 3.3).

■

REMARQUE 9 En pratique, l'axe d'un vissage pourra être trouvé en cherchant les $M \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{Mv(M)}$ est colinéaire à l'axe de la rotation (vectorielle) calculé auparavant.

3.3 Composition des déplacements

Les résultats suivants sont donnés sans preuve. Ils constituent de bons exercices de géométrie...

Intéressons nous d'abord à la composée d'une rotation d'axe D dirigé par $\overrightarrow{u}$ et de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.

- Si $\overrightarrow{u} // \overrightarrow{v}$, on obtient un vissage par définition.
- Si $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, on obtient une rotation d'axe parallèle à D (le prouver sans utiliser le théorème du paragraphe précédent !)
- Dans le cas général, on décompose $\overrightarrow{v}$ selon $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}^\perp$, en se souvenant que dans la définition des vissages, la rotation et la translation commutent.

Voyons maintenant la composée de deux rotations d'axes D_1 et D_2 dirigés par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$:

- Si $D_1 = D_2$, on obtient une rotation d'axe D_1.
- Si D_1 et D_2 sont parallèles et distincts, on obtient une rotation d'axe D_3 parallèle à D_1 et D_2, ou bien une translation de vecteur orthogonal à D_1.
- Sinon, on obtient un vissage (une rotation si les deux droites sont concourantes)

Pour ce qui concerne les vissages, on utilise les résultats précédents.

3.4 Quelques mots sur les antidéplacements

La classification des antidéplacements de l'espace est hors programme. On la donne quand même, dans la mesure où elle fournit un bon exercice de géométrie.

PROPOSITION 13 *Il existe trois types d'antidéplacements :*

- *les symétries centrales ;*
- *les réflexions glissées ;*
- *les compositions de réflexion et de rotation d'axe orthogonal au plan de réflexion.*

PREUVE : Discuter selon la nature de la partie linéaire. ■

REMARQUE 10 On ne donne ici aucun résultat sur les compositions d'isométries quelconque. Si on y est confronté, on s'en tient à la démarche usuelle : étude de la partie linéaire, et des points fixes.

Par ailleurs, on pourra montrer, dans chacun des trois cas, l'unicité des éléments géométriques (centre de symétrie, plan de réflexion, ...).

4 Similitudes du plan

Dans toute cette partie, on travaille dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$, même si la définition et les résultats du premier paragraphe s'étendent à tout espace de dimension finie.

4.1 Généralités

DÉFINITION 8
Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Une k-similitude est une application affine s de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui multiplie les distances par k :

$$\forall M, N \in \mathcal{P}, \qquad s(M)s(N) = kMN.$$

EXEMPLE 8 *Si on compose une homothétie de rapport $k > 0$ avec une isométrie, on obtient une k-similitude.*

On laisse au lecteur le soin de montrer les résultats suivants, de preuve aisée :

FAIT 4 *Une application affine s est une k-similitude si et seulement si sa partie linéaire est de la forme $\overrightarrow{s} = ku$, avec $u \in O(E)$.*

Corollairement, le déterminant de la partie linéaire d'une k-similitude est k^2 ou $-k^2$, et les similitudes sont bijectives.

FAIT 5 *Si s est une k-similitude et h une homothétie de rapport $\frac{1}{k}$, alors $s \circ h$ et $h \circ s$ sont des isométries.*

Réciproquement, s'il existe une homothétie h de rapport $k > 0$ tel que $s \circ h$ ou $h \circ s$ est une isométrie, alors s est une $\frac{1}{k}$-similitude.

FAIT 6 *L'ensemble constitué des similitudes du plan constitue un sous-groupe du groupe affine du plan (pour la loi $\circ$).*

FAIT 7 *Les similitudes conservent les angles **non orientés** entre vecteurs.*

4.2 Etude des similitudes directes

DÉFINITION 9
Une k similitude sera dite *directe* lorsque le déterminant de sa partie linéaire est k^2 (*indirecte* sinon).

Une similitude directe conserve donc les angles **orientés**...

Les 1-similitudes sont connues... puisqu'il s'agit des isométries.

PROPOSITION 14 *Si s est une k-similitude **directe** de $\mathcal{P}$ avec $k \neq 1$, alors il existe un unique $\Omega \in \mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (unique modulo 2π) tels que s est la composée **commutative** de la rotation de centre Ω et de rayon θ, et de l'homothétie de même centre et de rapport k. On parle alors de la similitude de centre Ω, angle θ et rapport k.*

PREUVE : Déjà, $\overrightarrow{s}$ est de la forme kf, avec $f \in SO(E)$ distinct de l'identité (pourquoi ?), donc de la forme R_θ, avec $\theta \neq 0\,[2\pi]$.

On va montrer que s admet un unique point fixe (on aura alors l'unicité d'un éventuel Ω, dans l'écriture donnée dans l'énoncé ; l'unicité de θ s'obtenant en observant à la partie linéaire).

L'existence et l'unicité de ce point fixe sera assurée si on montre que $\overrightarrow{s} - \mathrm{Id}_E$ est bijectif (car alors, on cherche Ω sous la forme $O + \overrightarrow{u}$, ce qui revient à chercher $\overrightarrow{u}$ tel que $(\overrightarrow{s} - \mathrm{Id}_E)(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{Os(O)}$...)

Montrons donc... l'injectivité de $\overrightarrow{s} - \mathrm{Id}_E$, en prenant $\overrightarrow{v}$ dans son noyau. On a alors $\overrightarrow{s}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$. Si on note $O' = O + \overrightarrow{v}$, on aura :

$$kOO' = s(O)s(O') = \|\overrightarrow{s}(\overrightarrow{OO'})\| = \|\overrightarrow{s}(\overrightarrow{v})\| = \|\overrightarrow{v}\| = OO',$$

ce qui implique $OO' = 0$ (car $k \neq 1$) puis $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Maintenant, considérons s, ainsi que les deux applications $h(\Omega, k) \circ r(\Omega, \theta)$ et $r(\Omega, \theta) \circ h(\Omega, k)$: il s'agit d'applications affines coïncidant en Ω et ayant la même partie linéaire : elles sont donc égales. ■

4.3 Utilisation des complexes

FAIT 8 *Si z, ω et z' désignent les affixes de M, Ω et $s(M)$, où s est la similitude de centre Ω, angle θ et rapport $k > 0$, alors :*

$$z' = \omega + ke^{i\theta}(z - \omega).$$

IL VA SANS DIRE que le lecteur ne passera pas à la suite avant de prouver l'affirmation précédente...

PROPOSITION 15 *Si A, A', B et B' sont quatre points du plans tels que les longueurs AB et $A'B'$ sont distinctes (et non nulles), alors il existe une unique similitude* **directe** *envoyant A en A' et B en B'.*

PREUVE : Tout d'abord, on constate que le système linéaire à inconnues complexes α et β $\begin{cases} z_{A'} = \alpha z_A + \beta \\ z_{B'} = \alpha z_B + \beta \end{cases}$ est de Cramer (déterminant $z_A - z_B \neq 0$), donc il existe une (unique) solution (α, β). En posant $k = |\alpha|$ et θ un argument de α, on est amené à chercher $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\beta = \omega - \alpha\omega = \omega(1 - \alpha)$, équation qui admet une solution puisque $\alpha \neq 1$ (sans quoi, $z_{B'} - z_{A'} = z_A - z_B$ donc $A'B' = AB$: exclu).

Ainsi, il existe bien une similitude envoyant A en A' et B en B'. Méfions nous de l'unicité qu'on pourrait croire montrée dans ce qui précède : on a fait une construction en deux temps... Cela dit, si la similitude de centre ω', rapport k' et angle θ' est solution, on doit avoir $k'\mathrm{e}^{i\theta'} = \alpha = k\mathrm{e}^{i\theta}$, donc $k' = k$ et $\theta' = \theta\,[2\pi]$, mais aussi $\omega'(1 - k'\mathrm{e}^{i\theta'}) = \beta = \omega(1 - k\mathrm{e}^{i\theta})$, donc $\omega' = \omega$, ce qui établit l'unicité. ■

Une preuve "un peu plus" géométrique serait plus délicate : on trouve les formes nécessaires de k et θ facilement, mais pour le centre, c'est une autre affaire... dont on pourra discuter en khôlle !

4.4 Similitudes indirectes (HP)

EXEMPLE 9 *Si on compose une réflexion et une homothétie de rapport $k > 0$, on obtient une k-similitude indirecte (pourquoi ?).*

REMARQUE 11 L'application $z \mapsto \overline{z}$ correspond à la réflexion de $\mathcal{P}$ par rapport à "l'axe des x" (axe des réels...).

EXERCICE 5 *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $k > 0$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Donner la nature géométrique des transformations du plan associées aux applications suivantes :*

- *$z \mapsto e^{2i\alpha}\overline{z}$;*
- *$z \mapsto ke^{2i\alpha}\overline{z}$;*
- *$z \mapsto z_0 + ke^{2i\alpha}\overline{(z - z_0)}$.*

Les 1-similitudes indirectes sont les isométries négatives, c'est-à-dire les symétries glissées. Les autres similitudes indirectes se décrivent également complètement :

PROPOSITION 16 *Toute k-similitude indirecte ($k \neq 1$) s'écrit comme la composée commutative d'une réflexion et d'une homothétie de centre élément de l'axe de la réflexion, et de rapport k.*

Cette écriture est de plus unique (l'axe de la réflexion et le centre de l'homothétie sont imposés par la similitude).

PREUVE : On donne une preuve alliant arguments géométriques et calculatoires. f y désigne une k-similitude indirecte, avec $k \neq 1$. On identifie l'application f de $\mathcal{P}$ dans lui-même, et l'application associée de $\mathbb{C}$ dans lui-même.

$g : z \mapsto f(\overline{z})$ correspond à $f \circ s$, où s est une réflexion. g est donc une similitude directe, donc de la forme $z \mapsto az + b$, puis $f(z) = g(\overline{z}) = a\overline{z} + b$. On peut écrire $a = k\mathrm{e}^{2i\alpha}$, avec $k > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, et on cherche alors z_0 tel que $b = z_0 - k\mathrm{e}^{2i\alpha}\overline{z_0}$, ce qui revient à l'existence d'un point fixe pour f. L'existence d'un tel point fixe se montre comme dans le cas des similitudes directes (injectivité puis rurjectivité de $\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E$).

On a maintenant $f : z \mapsto z_0 + k\mathrm{e}^{2i\alpha}\overline{(z - z_0)}$. Si Ω est le point d'affixe Ω, on a donc (exercice 5) $f = h \circ s = s \circ h$, où h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k, et s la réflexion par rapport à la droite $\Omega + \mathbb{R}\mathrm{e}^{i\alpha}$.

Pour l'unicité, notons qu'une telle similitude admet un unique point fixe Ω ($f(z) = z$ implique $z - z_0 = 0$, car $k \neq 1$), et la direction de l'axe de la réflexion est égale au noyau de $\overrightarrow{f} - k\mathrm{Id}_E$ (l'axe de réflexion est donc complètement déterminé puisqu'on connait l'un de ses points et sa direction). ■

5 Cercles et sphères

5.1 Mise en équation

Définition 10

- La *sphère* de centre $\Omega \in \mathcal{E}_3$ de rayon $R \geq 0$ est l'ensemble des $M \in \mathcal{E}_3$ tels que $\Omega M = R$.
- Le *cercle* de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ et de rayon $R \geq 0$ est l'ensemble des points M d'un plan affine $\mathcal{P}$ tels que $\Omega M = R$.

On peut donner des équations intrinsèques des cercles et sphères de deux types bien différents (l'action se situe dans $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_3$ muni d'un repère orthonormé) :

- La relation $\Omega M^2 = R^2$ fournit une équation des sphères de la forme :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2.$$

  Le difficile cas des cercles est laissé en exercice !!
- Si A et B sont deux points diamétralement opposés (on dit aussi "antipodiques" dans l'espace) du cercle (resp. de la sphère), c'est-à-dire tels que leur milieu est Ω, on a :

$$\Omega M^2 = R^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$$

  (écrire $\Omega M^2 = (\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{AM}).(\overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{BM})$, pour arriver à la relation $\Omega M^2 = R^2 + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$).

Si on cherche une paramétrisation des cercles et sphères, on est en fait ramené à décrire l'ensemble des vecteurs de norme 1 : il suffit d'un paramètre en dimension 2, et de deux en dimension 3.

- Si $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une base orthogonale de E, les vecteurs de norme 1 sont de la forme $\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta j$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ (il SUFFIT de prendre $\theta \in [0, 2\pi[$), d'où l'équation suivante pour $\mathcal{C}(\Omega, R)$: $\left\{\begin{array}{l} x = x_\Omega + R\cos\theta \\ y = y_\Omega + R\sin\theta \end{array}\right.$.
- Si $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base orthogonale de E, les vecteurs de norme 1 sont de la forme $\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{u}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u}$ de norme $|\sin\theta|$ dans $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, donc de la forme $\sin\theta(\cos\lambda\,\overrightarrow{j} + \sin\lambda\,\overrightarrow{k})$, d'où l'équation suivante pour $\mathcal{S}(\Omega, R)$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_\Omega + R\cos\theta \\ y = y_\Omega + R\sin\theta\cos\lambda \\ z = z_\Omega + R\sin\theta\sin\lambda \end{array}\right. .$$

  Les physiciens préfereront écrire : $\left\{\begin{array}{l} x = x_\Omega + R\sin\varphi\cos\theta \\ y = y_\Omega + R\sin\varphi\sin\theta \\ z = z_\Omega + R\cos\varphi \end{array}\right.$ (φ est la *colatitude* ("angle par rapport au pôle nord") et θ la *longitude*)

5.2 Intersections des sphères entre elles ou avec des plans

On termine ce chapitre par des résultats "géométriquement clairs". Les preuves (analytiques) se font dans la plupart des cas EN SE PLACANT DANS UN BON REPERE, après avoir éliminé les cas triviaux.

Proposition 17 *L'intersection des cercles $\mathcal{C}(\Omega, R)$ et $\mathcal{C}(\Omega', R')$ est :*

- *$\emptyset$ si $\Omega\Omega' > R + R'$ ou $\Omega = \Omega'$ et $R \neq R'$;*
- *$\mathcal{C}(\Omega, R)$ si $\Omega = \Omega'$ et $R = R'$;*
- *un singleton si $\Omega\Omega' = R + R' > 0$;*

- *deux points dont le centre est sur le segment* $[\Omega, \Omega']$ *si* $0 < \Omega\Omega' < R + R'$.

PREUVE : On se place dans le cas $\Omega \neq \Omega'$, et on travaille dans un repère orthonormé $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. ■

PROPOSITION 18 *L'intersection des sphères* $\mathcal{S}(\Omega, R)$ *et* $\mathcal{S}(\Omega', R')$ *est :*

- $\emptyset$ *si* $\Omega\Omega' > R + R'$ *ou* $\Omega = \Omega'$ *et* $R \neq R'$ *;*
- $\mathcal{S}(\Omega, R)$ *si* $\Omega = \Omega'$ *et* $R = R'$ *;*
- *un singleton si* $\Omega\Omega' = R + R' > 0$ *;*
- *un cercle dont le centre est sur le segment* $[\Omega, \Omega']$ *si* $0 < \Omega\Omega' < R + R'$.

PREUVE : On se place dans le cas dernier cas (les autres étant triviaux) et on travaille dans un repère orthonormé $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j} \overrightarrow{k})$, où $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{\Omega\Omega'}}{\Omega\Omega'}$. ■

PROPOSITION 19 *L'intersection d'une sphère* $\mathcal{S}$ *et d'un plan* Π *est soit l'ensemble vide, soit un cercle de* Π.

PREUVE : Travailler dans un repère orthonormé $(\Omega', \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, où Ω' est la porjection orthogonale du centre Ω de $\mathcal{S}$ sur Π, et $\overrightarrow{k} \perp \Pi$. ■