Espaces affines

Table des matières

Dans ce chapitre, les espaces vectoriels en jeu sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Ils sont tous notés en lettres capitales $E, F, G, \ldots$, pour les distinguer des espaces et sous-espaces affines, notés avec des lettres calligraphiées $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \ldots$

De même, les points seront en général notés avec des lettres capitales $M, N, \ldots$, et les vecteurs seront "fléchés" $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \ldots$

1 Espaces et sous-espaces affines

1.1 Espaces affines et translations

Définition 1

Un *espace affine* est un ensemble non vide $\mathcal{E}$ associé à un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E ("espace vectoriel sous-jacent", ou "*direction*", noté $\overrightarrow{\mathcal{E}}$), ainsi qu'une loi externe $\widetilde{+} : \mathcal{E} \times E \to \mathcal{E}$ vérifiant :

- pour tout $P, Q \in \mathcal{E}$, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $Q = P \widetilde{+} \overrightarrow{u}$. Ce vecteur est noté $\overrightarrow{PQ}$ par la suite ;
- pour tout $P \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$, $P \widetilde{+} (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = (P \widetilde{+} \overrightarrow{u}) \widetilde{+} \overrightarrow{v}$.

Pour ce qui nous concernera, E est de dimension finie : cette dimension sera par définition celle de $\mathcal{E}$.

On parlera de *droite* (resp. *plan*) affine lorsque la direction est de dimension 1 (resp. 2).

Remarque 1 La loi externe est notée $\widetilde{+}$ pour ne pas la confondre avec la somme des vecteurs, qui est une loi de composition interne sur E. Cela dit, très rapidement, on prendra pour seule notation $+$ pour les deux lois.

Exercice 1 *Montrer la relation de* Chasles *:*

$$\forall A, B, C \in \mathcal{E}, \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Remarque 2 De cette dernière relation, on peut tirer pour tout $M \in \mathcal{E}$: $\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MM}$, puis $\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{0}$, de sorte que : $M \widetilde{+} \overrightarrow{0} = M \ldots$

Définition 2

Si on fixe $\overrightarrow{u} \in E$, l'application $t_{\overrightarrow{u}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E},\ P \mapsto P \widetilde{+} \overrightarrow{u}$ (qui est bijective ; pourquoi ?) est la *translation* de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Exercice 2 *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines de même dimension et $P_0 \in \mathcal{E}$ et $Q_0 \in \mathcal{F}$. Montrer qu'il existe un isomorphisme φ de $E = \overrightarrow{\mathcal{E}}$ sur $F = \overrightarrow{\mathcal{F}}$, puis que l'application $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{F},\ P \mapsto Q_0 \widetilde{+} \varphi(\overrightarrow{P_0 P})$ établit une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$.*

Ainsi, tous les espaces de même dimension sont en bijection (et même en fait un peu mieux). On s'autorisera ainsi à parler DU plan affine pour tout espace affine de dimension 2, que l'on notera souvent $\mathcal{E}_2$. De même, $\mathcal{E}_3$ désignera n'importe quel espace affine de dimension 3.

1.2 Exemples d'espaces affines

- Soit E un espace vectoriel. On peut le munir d'une structure d'espace affine, de direction lui-même, en prenant comme loi de composition "externe" : $\overrightarrow{u} \widetilde{+} \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. On établit alors sans mal que les axiomes de la définition 1 sont vérifiés.
- Soit encore E un espace vectoriel, F un sous-espace, et $x_0 \in E$. L'ensemble $\mathcal{F} = x_0 + F$ est alors muni naturellement d'une structure d'espace affine de direction F, la loi de composition externe coïncidant là encore avec la loi de composition interne de E. On dit que $\mathcal{F}$ est un *sous-espace affine* de E.

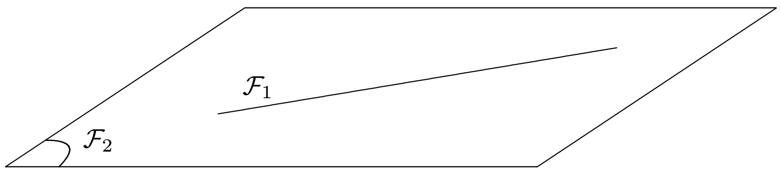
- De même, si $\mathcal{E}$ est un espace affine, $P_0 \in \mathcal{E}$ et F est un sous-espace de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, on munit $P_0 \tilde{+} F$ d'une structure d'espace affine de direction F par restriction de $\tilde{+}$. Là encore, on parlera de *sous-espace affine* de $\mathcal{E}$.

Proposition 1 *Si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont deux sous-espaces affines d'une même espace $\mathcal{E}$, alors $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ est ou bien vide, ou bien un espace affine de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}_1} \cap \overrightarrow{\mathcal{F}_2}$.*

Preuve : On suppose que l'intersection est non vide, on fixe P_0 dans cette intersection, et on montre par double inclusion : $P_0 \tilde{+} \left(\overrightarrow{\mathcal{F}_1} \cap \overrightarrow{\mathcal{F}_2}\right) = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. ■

Définition 3
Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. On dit que $\mathcal{F}_1$ est parallèle à $\mathcal{F}_2$, et on note $\mathcal{F}_1 // \mathcal{F}_2$, lorsque $\overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \subset \overrightarrow{\mathcal{F}}_2$.

Remarques 3
- La relation // n'est pas symétrique (cas par exemple d'une droite affine, qui est parallèle à tout plan affine la contenant).



- La relation $\mathcal{F}_1 // \mathcal{F}_2$ n'est ni nécessaire ni suffisante pour avoir $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \emptyset$, BIEN ENTENDU.

Exercice 3 *On suppose $\mathcal{F}_1 // \mathcal{F}_2$. Montrer que $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \emptyset$, ou bien $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$.*

Exercice 4 *Si A et B sont deux points distincts de $\mathcal{E}$, montrer qu'il existe un unique sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de dimension 1 (droite affine) qui passe par A et B. Il est noté (AB).*

Définition 4
Si l'espace sous-jacent E est euclidien (muni d'une norme) et si D est une droite de $\mathcal{E}$, D admet exactement deux vecteurs directeurs de norme 1. Si on en choisit un, disons $\overrightarrow{u}$, pour orienter D, on peut alors définir la *distance algébrique* d'un bipoint (A, B) de $D \times D$, notée $\overline{AB}$, par $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\overrightarrow{u}$.

Il faut bien comprendre que cette distance algébrique n'est pas une grandeur intrinsèque : on a besoin de l'*orientation* de D par $\overrightarrow{u}$.

1.3 Repères cartésiens

Définition 5
- Un *repère cartésien* (ou *affine*) $\mathcal{R}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$ est la donnée d'un point $P_0 \in \mathcal{E}$ et d'une base $(f_1, \ldots, f_k)$ de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
- Les *coordonnées* d'un point $M \in \mathcal{E}$ dans un tel repère sont les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tels que $\overrightarrow{P_0M} = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k$. On note alors $M(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)_{\mathcal{R}}$, ou $M(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté possible sur le repère de travail.

Remarques 4
- Il faut distinguer l'écriture $M = (x_0, y_0)$, qui dit que M est un certain élément de $\mathbb{R}^2$, et l'écriture $M(x_0, y_0)$, qui dit que M a pour coordonnées (x_0, y_0) dans un certain repère cartésien, dans un espace affine qui n'est pas nécessairement $\mathbb{R}^2$.

- Pour retrouver les notations habituelles (en maths prétaupinales ou en physique), la matrice coordonnée d'un vecteur dans une base donnée sera juxtaposée à celui-ci. Ainsi, si $\mathcal{B} = (f_1, \ldots, f_k)$ est une base de E, la notation $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ signifiera : $\overrightarrow{u} = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k$. Là encore, on oubliera $\mathcal{B}$ s'il n'y a pas ambiguïté.

Exercice 5 *Si $\mathcal{R} = (P_0, \mathcal{B})$ avec $\mathcal{B}$ une base de E, et $A(x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}}$ et $B(y_1, \ldots, y_n)_{\mathcal{R}}$, montrer : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ (ouf!).*

Exercice 6 *On munit $\mathbb{R}^2$ de ses structures vectorielle et affine canoniques. Un repère naturel (que l'on dira canonique) est le repère $\mathcal{R}_0 = (O, e_1, e_2)$, avec $O = (0, 0)$, $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Un autre repère est le repère $\mathcal{R}_1 = (P_0, f_1, f_2)$, avec $P_0(2, 1)_{\mathcal{R}_0}$ (c'est-à-dire $P_0 = (2, 1)$!!), $f_1 = (2, 1)$ et $f_2 = (1, -3)$.*

On suppose $M(x, y)_{\mathcal{R}_0}$ et $M(X, Y)_{\mathcal{R}_1}$. Exprimer X et Y en fonction de x et y, et réciproquement.

Remarque 5 Dans le repère $\mathcal{R}_0$, on a $O(0, 0)$, mais il serait grotesque de *définir* O ainsi, puisque cela fait référence à un certain repère... qui fait intervenir O !

Solution : On écrit $\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2 = \overrightarrow{OP_0} + Xf_1 + Yf_2$. Si on exprime les vecteurs du membre de droite en fonction de e_1 et e_2, on obtient par liberté de (e_1, e_2) : $x = 2 + 2X + Y$ et $y = 1 + X - 3Y$. En résolvant un système linéaire (dont on peut être sûr qu'il est de Cramer ; pourquoi ? ?), on en tire :

$$X = \frac{1}{7}(3x + y - 7) \qquad \text{et} \qquad Y = \frac{1}{7}(x - 2y).$$

Bien entendu, on fait une petite vérification, avec $M = P_0$...

1.4 Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$

Dans ce paragraphe, $\mathcal{E}$ désigne $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure affine canonique. L'espace sous-jacent est donc $\mathbb{R}^2$, et on dispose du repère cartésien canonique $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Bien entendu, la quasi totalité des résultats se "translatent" aux sous-espaces des espaces affines de dimension 2.

Les sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ sont de dimension 0 (points), 1 (droites) ou 2 ($\mathcal{E}$ tout entier). Seules les droites nous intéressent donc.

On va décrire de deux façons les éléments de $\Delta = P + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ avec $P(x_P, y_P)$ et $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} eq0$:

- **Equation paramétrée :** Par définition, $M(x, y) \in \Delta$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $M = P + t\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire : $\begin{cases} x &= x_P + tu_x \\ y &= y_P + tu_y \end{cases}$
- **Equation intrinsèque, ou cartésienne :** On peut également dire que $M \in \Delta$ si et seulement si $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{u})$ est liée, ce que l'on peut traduire par : $\begin{vmatrix} x - x_P & u_x \\ y - y_P & u_y \end{vmatrix} = 0$, soit encore $\varphi(M) = \varphi(P)$, avec

$$\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad M(x, y) \longmapsto xu_y - yu_x.$$

Remarques 6

- On retrouve les deux modes de description FONDAMENTALEMENT DIFFERENTS d'un ensemble : le point de vue énumératif, et le point de vue intrinsèque.
- Il faut être capable de passer rapidement d'une représentation à l'autre.

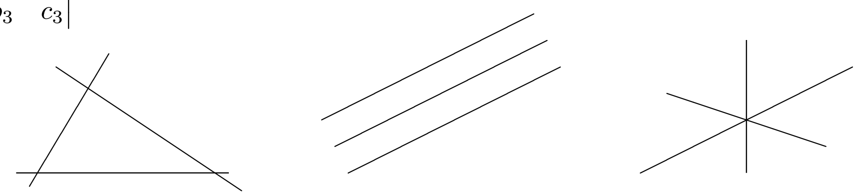
Exercice 7 *On considère quatre droites $D_1, D_2, \Delta_1, \Delta_2$ d'équations $D_i : \begin{cases} x = \alpha_i t + \beta_i \\ y = \gamma_i t + \delta_i \end{cases}$ et $\Delta_i : a_i x + b_i y = c_i$.*

- *Montrer que $D_1 // D_2$ si et seulement si $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$.*
- *Montrer que $\Delta_1 // \Delta_2$ si et seulement si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$.*
- *Donner une CNS simple pour avoir $D_1 // \Delta_1$.*

Proposition 2 *Considérons trois points $M_i(x_i, y_i)$ (coordonnées rapportées à un repère $\mathcal{R}$ fixé). Ces points sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.*

Preuve : En retranchant la troisième ligne aux deux autres, puis en développant par rapport à la troisième colonne, on voit que le déterminant en jeu est celui de la matrice représentant $(\overrightarrow{A_3A_1}, \overrightarrow{A_3A_2})$ dans la base de E associée au repère $\mathcal{R}$. ■

Exercice 8 *On considère trois droites affines de $\mathcal{E}_2$ d'équations respectives $\Delta_i : a_i x + b_i y = c_i$ (avec, pour chaque $i \in [\![1,3]\!]$, $(a_i, b_i) eq (0,0)$). Montrer que les trois droites sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.*



Situation générique *Parallélisme* *Concourance*

1.5 Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$

Ici, $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ muni de son repère cartésien canonique $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On s'intéresse cette fois aux plans et aux droites de $\mathcal{E}$.

1.5.1 Plans

On va décrire de deux façons les éléments de $\Pi = P + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, où $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est libre, avec $P(x_P, y_P, z_P)$, et $\underset{bc}{\mathrm{Mat}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{pmatrix}$:

- **Equation paramétrée :** Par définition, $M(x,y) \in \Delta$ si et seulement s'il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $M = P + t_1 \overrightarrow{u} + t_2 \overrightarrow{v}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = x_P + t_1 u_x + t_2 v_x \\ y = y_P + t_1 u_y + t_2 v_y \\ z = z_P + t_1 u_z + t_2 v_z \end{cases}$$

- **Equation intrinsèque/cartésienne :** On peut également dire que $M \in \Pi$ si et seulement si $\overrightarrow{PM} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, ve qui revient à dire que $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est liée, ce que l'on peut traduire par : $\begin{vmatrix} x - x_P & u_x & v_x \\ y - y_P & u_y & v_y \\ z - z_P & u_z & v_z \end{vmatrix} =$

0, soit encore $\varphi(M) = \varphi(P)$, avec

$$\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad M(x,y,z) \longmapsto x \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}.$$

On retrouve toujours ce type de description pour les hyperplans affines.

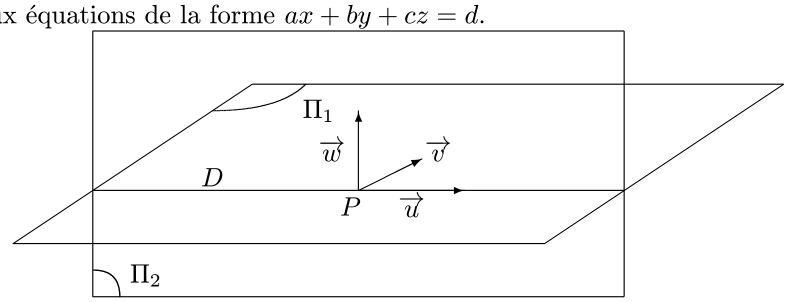
1.5.2 Droites

On considère ici $D = P + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$, avec $P(x_P, y_P, z_P)$, et $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$:

- **Equation paramétrée :** Par définition, $M(x,y) \in \Delta$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tels que $M = P + t\overrightarrow{u}$,c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x &= x_P + tu_x \\ y &= y_P + tu_y \\ z &= z_P + tu_z \end{cases}$$

- **Equation intrinsèque :** On peut également voir D comme l'intersection de deux plans affine $\Pi_1 = P + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $\Pi_2 = P + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$, où $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont tels que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ soit une base de E (on a donc beaucoup de choix possible pour ces deux vecteurs. . .). Le lecteur vérifiera qu'on a effectivement $D = \Pi_1 \cap \Pi_2$. M est alors dans D si et seulement si M est dans Π_1 et dans Π_2, ce qui se traduit par la conjonction de deux équations de la forme $ax + by + cz = d$.



Remarque 7 Il est fondamental de noter la différence entre les équations intrinsèques des droites du plan et de l'espace : dans le premier cas, il s'agit d'hyperplan $(1 = 2 - 1)$, et on a donc une seule équation affine, alors que dans le second cas, il ne s'agit plus d'hyperplan, mais de l'intersection de deux hyperplans, d'où les deux équations affines.

1.5.3 Questions de parallélisme

- Le parallélisme de deux droites s'exprime par le fait que leurs vecteurs directeurs sont liés, ce qui revient à dire que le produit vectoriel de ceux-ci est nul : trois équations scalaires linéaires (en fait, deux indépendantes).
- Dire que $D//\Pi$ revient à dire qu'un vecteur directeur de D est lié à deux vecteurs formant une base de Π, ce qui revient à la nullité d'un déterminant.
- Enfin, si $\overrightarrow{\Pi_1} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ et $\overrightarrow{\Pi_2} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$, alors $\Pi_1 // \Pi_2$ revient à dire que $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont dans $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$, ce qui revient à annuler deux déterminants. *Dans le chapitre suivant, on verra qu'on peut également comparer deux vecteurs normaux...*

Exercice 9 *Donner une équation cartésienne du plan P passant par $A(2,0,0)$ tel que $D_1//P$ et $D_2//P$, avec*

$$D_1 : \begin{cases} x &= 2t+1 \\ y &= 3t-2 \\ z &= t \end{cases} \quad et \quad D_2 : \begin{cases} x+y+z &= -1 \\ x-2y+3z &= 2 \end{cases}$$

Ensuite, donner l'intersection de P avec D_1, D_2, et D_3 la droite passant par $B(1,2,-5)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

2 Applications affines

2.1 Définitions et généralités

Définition 6
Une application $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ sera dite *affine* s'il existe $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que :

$$\forall (P, \overrightarrow{v}) \in \mathcal{E} \times E, \qquad \varphi(P+\overrightarrow{v}) = \varphi(P) + u(\overrightarrow{v}).$$

Dans le cas où $E = F$ et φ est bijective, on parle de *transformation* affine.

Remarque 8 La définition dit qu'une application affine est parfaitement connue dès qu'on connaît l'image d'un point quelconque P ainsi que u (ceci car tout autre point peut s'écrire $P + \overrightarrow{v}$ pour un certain $\overrightarrow{v} \in E$).

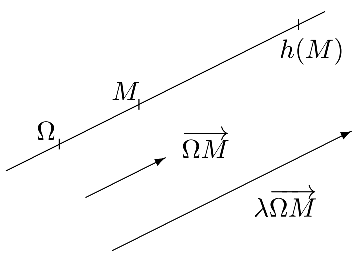
Proposition 3 *Les faits suivants sont importants mais de preuves faciles, laissées au lecteur.*
- *Dans la définition précédente, lorsque u existe, alors elle est unique. On dit que u est la* partie linéaire *de φ, et on note souvent $u = \overrightarrow{\varphi}$.*
- *Si $A, B \in \mathcal{E}$, alors $\varphi(B) = \varphi(A) + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AB})$.*
- *L'image d'un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ par une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{F}$.*
- *L'image réciproque d'un sous-espace affine de $\mathcal{F}$ par une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.*
- *Une application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est bijective si et seulement si $\overrightarrow{\varphi}$ est un isomorphisme de E sur F (ce qui impose alors* $\dim E = \dim F$*).*
- *L'ensemble des transformations affines d'un espace affine $\mathcal{E}$ est un groupe pour la loi $\circ$ de composition des applications (*"groupe affine"*).*
- *Les translations de $\mathcal{E}$ sont des transformations affines de $\mathcal{E}$.*

Remarque 9 Deux applications affines seront égales si et seulement si elles coïncident en un point et ont même partie linéaire (le vérifier). *Ceci nous fournira un outil très puissant pour l'étude des applications affines.*

Le résultat suivant est laissé en exercice, mais il est important dans l'étude pratique des applications affines.

Exercice 10 *Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans lui-même. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est soit vide, soit un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, de direction* $\ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E)$.

Définition 7
Soit $\Omega \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. L'homothétie de centre Ω et de rapport λ est l'application $h : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui à $M \in \mathcal{E}$ associe $\varphi(M) = \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega M}$.



FAIT 1 *Une telle application est une transformation affine de $\mathcal{E}$.*

PREUVE : Plus précisément, on montre que $\overrightarrow{h} = \lambda \mathrm{Id}_E$ et h^{-1} est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$. ■

Le fait suivant est très utile, puisqu'il caractérise certaines applications affines simples par leur partie linéaire. Ces résultats ne sont cependant pas à proprement parler au programme : on les verra plus comme de bons exercices.

PROPOSITION 4 *Soit $\varphi \in Aff(\mathcal{E})$. Alors :*
- *φ est une translation si et seulement si $\overrightarrow{\varphi} = Id_E$.*
- *φ est constante si et seulement si $\overrightarrow{\varphi}$ est l'application nulle.*
- *φ est une homothétie de rapport $\lambda \notin \{0,1\}$ si et seulement si $\overrightarrow{\varphi} = \lambda \mathrm{Id}$.*

COROLLAIRE 1 *L'ensemble $\mathcal{H}$ constitué des translations et des homothéties affines est un groupe pour la loi $\circ$ de composition des applications.*

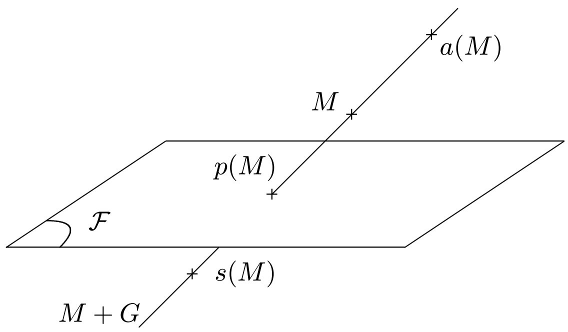
2.2 Projections et symétries affines ; affinités

DÉFINITION 8
Si $E = F \oplus G$, $\overrightarrow{\mathcal{F}} = F$ et $M \in \mathcal{E}$, il existe un unique point $M' \in \mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{M'M} \in G$ (le prouver !). Si on note $p(M) = M'$, alors p est la *projection affine* sur $\mathcal{F}$ dans la direction G.

DÉFINITION 9
Avec les notations de la définition précédente, posons $s(M) = M' + \overrightarrow{MM'}$: s est par définition la *symétrie affine* par rapport à $\mathcal{F}$, dans la direction G.

REMARQUE 10 On vérifie sans mal que $s(M)$ est tel que $\overrightarrow{Ms(M)} \in G$ et le milieu de $[Ms(M]$ est dans $\mathcal{F}$. On pourrait d'ailleurs définir $s(M)$ comme cela, mais il faudrait alors montrer l'existence et l'unicité d'un point vérifiant ces deux propriétés...

DÉFINITION 10
Toujours avec les même notations, et en supposant que F est un *hyperplan* de E et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$: si on note $a(M) = M' + \lambda\overrightarrow{M'M}$, a est l'*affinité* de base $\mathcal{F}$, direction G, et rapport λ.



Le lecteur vérifiera sans mal que les projections et symétries affines et les affinités sont... des applications affines !

EXERCICE 11 *Dans $\mathbb{R}^3$ muni de ses structures euclidienne et affine, et de son repère cartésien canonique $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$, on pose $f_1 = (-1,1,1)$, $f_2 = (1,-1,1)$, $f_3 = (1,1,-1)$, et $M_0(3,-1,0)$, puis $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ et $G = \mathbb{R}f_3$ (de sorte que $E = F \oplus G$) et enfin $\Pi = M_0 + F$.*

Donner les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de $\varphi\big(M(x,y,z)\big)$ en fonction de x, y, z, lorsque φ est :
- *la projection sur Π dans la direction G ;*

- *la symétrie par rapport à* Π*, de direction* G *;*
- *l'affinité de base* Π*, rapport* -2 *et direction* G*.*

On regardera la feuille de travail Maple jointe...

REMARQUE 11 RECIPROQUEMENT, si on dispose de l'expression analytique d'une affinité φ, on retrouve facilement sa base (ensemble des points fixes), son rapport (via la trace de la partie linéaire), et sa direction : $\ker(\overrightarrow{\varphi} - \lambda \mathrm{Id}_E)$.
Même chose pour les projections et symétries affines.
Cela dit, *ATTENTION*, il existe d'autres applications affines : nous en étudierons une classe importante dans le chapitre suivant.

2.3 Alignement et parallélisme

On termine par un le résultat suivant, qui dit, fondamentalement, que les applications affines laissent invariant les propriétés géométriques affines.

PROPOSITION 5 *Si* $\varphi \in Aff(\mathcal{E}, \mathcal{F})$*, alors* φ *conserve l'alignement et le parallélisme :*
- *Si* $A, B, C \in \mathcal{E}$ *sont alignés, alors* $\varphi(A), \varphi(B)$ *et* $\varphi(C)$ *également.*
- *Si* $\mathcal{E}_1 // \mathcal{E}_2$*, alors* $\varphi(\mathcal{E}_1) // \varphi(\mathcal{E}_2)$*.*

REMARQUE 12 Le *théorème fondamental de la géométrie affine* dit que réciproquement, si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ transporte les droites de $\mathcal{E}$ en des droites de $\mathcal{F}$, alors f est affine. Mais c'est une autre histoire...

3 Barycentres

3.1 La notion de barycentre

"- Mamie, je viens d'avoir mon bac ; le coefficient de maths était 50 !
- Ho la la..."

PROPOSITION 6 *Soient* $M_1, \ldots, M_p \in \mathcal{E}$ *et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ *de somme égale à 1. Alors il existe un unique point* $G \in \mathcal{E}$ *tel que* $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{0}$*.*

De plus, si M *est un point quelconque de* $\mathcal{E}$*, on a :* $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{MM_i} = \overrightarrow{MG}$*.*

PREUVE : On fixe d'abord un point quelconque $\Omega \in \mathcal{E}$, on considère le point $G = \Omega + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{\Omega M_i}$ (pourquoi ?) et on vérifie $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{0}$, ce qui nous donne l'existence.

On montre ensuite que si M est un autre point de $\mathcal{E}$, alors (Chasles en passant par Ω) $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{MM_i} = \overrightarrow{MG}$.
L'unicité découle de cette dernière relation, qu'on applique à un autre point G' vérifiant la même propriété. ■

DÉFINITION 11
Avec les notations de la proposition précédente, G s'appelle le *barycentre* de la famille (M_1, λ_1),...,(M_p, λ_p).

REMARQUES 13
- Si $\sum \lambda_i$ est différent de 1 mais aussi de 0, il existera bien un G tel que $\sum \lambda_i \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{0}$, mais cette fois on aura $\sum \lambda_i MM_i = \sigma \overrightarrow{MG}$, où $\sigma = \sum \lambda_i$ (prouver ce fait).

- Dans le cas où les λ_i sont tous égaux à $\dfrac{1}{p}$, on parle d'*isobarycentre*.

Exercice 12 *Comment calculer les coordonnées de G dans un repère cartésien donné ?*

Notation : *Au vu de l'exercice précédent, on notera $\lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_p M_p$ le barycentre des (M_i, λ_i). Attention, cette notation n'est pertinente que dans le cas où $\sum \lambda_i = 1$: pourquoi ?*

Exercice 13 *Dans le cas où $\sum \lambda_i = 0$, discuter l'existence et l'unicité de P tel que $\sum \lambda_i \overrightarrow{GM_i} = 0$.*

De même que les sous-espaces vectoriels de E sont les parties stables par combinaison linéaire (c'est ici une définition), on pourra montrer que $X \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine si et seulement s'il est stable par barycentre.

On termine par un résultat naturel (le lecteur sera alors convaincu que les applications affines sont bien adaptées aux espaces affines) :

Proposition 7 *Les applications affines conservent les barycentres.*

Preuve : Le plus dur est de l'énoncer précisément ! ■

Exercice 14 *Comparer le barycentre G_1 de $(M_1, \lambda_1), \ldots, (M_p, \lambda_p)$, et celui G_2 de $(M_1, 10\lambda_1), \ldots, (M_p, 10\lambda_p)$.*

3.2 Bases affines

Définition 12

Une famille $(M_1, \ldots, M_p)$ de points de $\mathcal{E}$ est dite *affinement libre* lorsqu'aucun des points ne peut s'exprimer comme barycentre des autres.

Exercice 15 *Montrer que $(M_1, \ldots, M_p)$ est affinement libre si et seulement si la famille de vecteurs $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \ldots, \overrightarrow{M_1M_p})$ est libre.*

Définition 13

Une famille $(M_1, \ldots, M_p)$ de points de $\mathcal{E}$ est dite *affinement génératrice* lorsque tout point de $\mathcal{E}$ peut s'exprimer comme barycentre des M_i.

Exercice 16 *Montrer que $(M_1, \ldots, M_p)$ est affinement génératrice si et seulement si la famille de vecteurs $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \ldots, \overrightarrow{M_1M_p})$ est génératrice.*

Définition 14

Une famille $(M_1, \ldots, M_p)$ de points de $\mathcal{E}$ est dite *base affine* lorsqu'elle est affinement libre et génératrice.

L'intérèt de telles familles apparait dans les deux résultats suivants, conséquences des deux derniers exercices :

Proposition 8

- *Si $(A_0, \ldots, A_n)$ est une base affine de $\mathcal{E}$ de dimension n, alors $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est un repère affine de $\mathcal{E}$.*
- *Réciproquement, si $(\Omega, \overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ est un repère affine de $\mathcal{E}$, alors en posant $\Omega_i = \Omega + \overrightarrow{u_i}$, la famille $(\Omega, \Omega_1, \ldots, \Omega_n)$ est une base affine.*

Ainsi, une base affine fournit naturellement des repères cartésiens. On va voir qu'on peut même "repérer" tout point de $\mathcal{E}$ d'une autre façon :

Proposition 9 *Si $(A_0, \ldots, A_n)$ est une base affine de $\mathcal{E}$, alors tout point de $\mathcal{E}$ peut s'exprimer comme barycentre des (A_i, λ_i). Il y a même* ***unicité*** *si on impose $\sum \lambda_i = 1$ (les λ_i sont alors les* coordonnées barycentriques *du point en question).*

La preuve est aisée et laissée en exercice (il n'y a que l'unicité à vérifier...).

3.3 Convexité

Définition 15

- Si $A, B \in \mathcal{E}$, le segment reliant A et B, noté $[AB]$ est l'ensemble des $\lambda A + (1-\lambda)B$, pour $\lambda \in [0,1]$.
- $X \subset \mathcal{E}$ est convexe si et seulement si pour tout $A, B \in X$, on a $[AB] \subset X$.

Exemple 1 *Les segments sont des parties convexes de $\mathcal{E}$ (le montrer tout de même !).*

Exercice 17 *Montrer une partie de $\mathbb{R}^2$ non convexe, puis deux parties convexes X_1 et X_2 telles que $X_1 \cup X_2$ soit non convexe.*

On se souvient que les fonctions convexes ont été définies à partir d'une propriété vérifiée pour les barycentres de deux points, puis, on a montré l'équivalence avec la même propriété pour les barycentres de n points. De même, on montrera :

Proposition 10 *$X \subset \mathcal{E}$ est convexe si et seulement si X est stable par barycentres à coefficients positifs.*

Remarque ultime : les fonctions convexes sont parfois définies par le fait que leur *épigraphe* (c'est-à-dire la partie du plan située dessus le graphe) est convexe.