Suites réelles

1 Généralités

EXERCICE 1 On suppose (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergentes. Montrer que u converge.

EXERCICE 2

1. Soit x une suite à valeurs > 0 convergeant vers $l > 0$. Montrer que la suite de terme général $y_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ converge vers l.
2. Application : montrer que les suites suivantes sont convergentes et donner leur limite :
   - $u_n = \sqrt[n]{\mathrm{C}_{2n}^n}$;
   - $v_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}}$;
   - (*) $w_n = \dfrac{1}{n^2} \sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}}$.

EXERCICE 3 Soit u une suite convergente. Montrer : $u_{n+1} - u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Et réciproquement ?

EXERCICE 4 Soit u une suite monotone dont une suite extraite converge. Montrer que u est convergente.

2 Exemples d'études de convergence

EXERCICE 5 *ARCHI CLASSIQUE*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n)$.

Montrer que u et v sont adjacentes. Leur limite commune s'appelle la "*moyenne arithmético-géométrique de a et b*".

On pourra commencer par montrer *soigneusement* :

$$0 < x < y \qquad \Longrightarrow \qquad x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y.$$

EXERCICE 6 Etudier la convergence des suites définies par les termes généraux suivants :

1. $u_n = \dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$;
2. $u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$;
3. $u_n = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{3^n}$;

4. $u_n = \dfrac{n\sin(n! - 1515)}{1+n^2}$;
5. $u_n = \dfrac{1+4+9+\cdots+n^2}{n^3}$;
6. $u_n = \sqrt{1+n+n\ln n} - \sqrt{n}$;
7. $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$;
8. $u_n = (-1)^n\big(2(-1)^n + 3\big)$;
9. $u_n = (-1)^n\big(2(-1)^n + \dfrac{3}{\sqrt{n}}\big)$;
10. $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$ (tracer le graphe de la fonction cos, puis encadrer les $\cos\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$ indépendamment de k) ;
11. $u_n = \dfrac{E(x)+E(2x)+\cdots+E(nx)}{n^2}$ (comment encadrer $E(y)$?) ;
12. $u_n = \dfrac{v_n \ln n}{v_n^2+1}$, où v_n est le nombre de chiffres dans la représentation décimale de n. On déterminera v_n lorsque $10^5 \leq n < 10^6$, puis en général v_n en fonction de n.

Exercice 7 Etudier ces suites, définies par des relations suivantes valables pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$;
2. $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2} + 6$;
3. $w_0 = 0$ et $w_{n+1} = -w_n + 2$.

Exercice 8 Soit u une suite arithmétique de raison non nulle. Montrer que

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}a_ka_{k+1}}{a_{2n+2}^4}$$

admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 9 Etudier les suites définies par les relations suivantes :

1. $u_0 = 1024$ et $u_{n+1} = 1515 + \sqrt{u_n}$;
2. $v_0 = 1515$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1+v_n^2}$.

Exercice 10 (***)

Soit φ une injection de $\mathbb{N}$ dans lui-même telle que $\dfrac{\varphi(n)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$. Montrer que $l \geq 1$.

Que dire si φ est surjective (resp. bijective) ?

3 Relations de comparaisons

EXERCICE 11 Donner des équivalents simples des suites :

1. $u_n = n(\sqrt[n]{n} - 1)$;
2. $u_n = \sqrt{n^2 + 1789n + 1515} - n$;
3. $u_n = \sqrt[n]{n^{1515} + 1789}$;
4. u_n est l'unique racine dans $[0, 1]$ de $x^n + nx - 1 = 0$;
5. (*) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^k}$;
6. (*) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} k^k$;
7. $u_n = 1 + 2! + \cdots + n!$;
8. $u_n = 1 - \cos \dfrac{\alpha}{n}$;
9. $u_n = n\big(\sin \dfrac{1}{n} - \tan \dfrac{1}{2n}\big)$;
10. $u_n = \tan \sin \dfrac{1}{n} - \sin \tan \dfrac{1}{n} \cdot$
    Pour cette dernière, en cas d'échec (...), on pourra utiliser Maple et essayer de comprendre comment il fait.

EXERCICE 12 (*) *Important*

Donner un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{1515}$ (comparer S_n à une intégrale). Demander à Maple ce qu'il en pense.

Par une méthode analogue, montrer : $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(\ln k + 1024)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

EXERCICE 13 Comparer les quatres suites définies par : $u_n = n^{\ln^2 n}$, $v_n = (n^2)^{\ln n}$, $w_n = (\ln n)^{n \ln n}$ et $z_n = (n \ln n)^n$.

EXERCICE 14 Même chose que l'exercice précédent, avec $\alpha_n = \big(\ln(\ln n)\big)^{-\ln(n \ln n)}$ et $\beta_n = \big(\ln(n \ln n)\big)^{-\ln(\ln n)}$.

EXERCICE 15 (*) *Technique classique*

1. Soit u une suite telle que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \neq 0$. Montrer : $u_n \sim ln$.
2. Application : Soit v la suite définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \sin v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, puis trouver un équivalent simple de v_n. On pourra chercher α tel que $\dfrac{1}{v_{n+1}^\alpha} - \dfrac{1}{v_n^\alpha}$ admette une limite finie non nulle.

4 Quizz

EXERCICE 16 Discuter la validité des affirmations suivantes, en donnant des preuves ou contre-exemples dans chaque cas :

1. Toute suite convergente est croissante ou décroissante.
2. Toute suite majorée est croissante.
3. Toute suite croissante est majorée.
4. Si u converge, alors u^2 également.
5. Si u^2 converge, alors u également.
6. Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \neq 0$, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l^n$.
7. Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \neq 0$, alors $u_n \sim u_0 l^n$.
8. Si u est ≥ 0 et $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors u est décroissante APCR.
9. Si $0 < u_n < \dfrac{\pi}{2}$ pour tout n et $\sin u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, alors $0 < l < 1$.
10. Toute suite non majorée tend vers $+\infty$.
11. Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $u_n + v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
12. Si $u_n + v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
13. Si u et v divergent, alors $u + v$ diverge.
14. Si $u + v$ diverge, alors u et v également.
15. (*) Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors u admet une extraction croissante.
16. Si u est extraite de v et v de w, alors u est extraite de w.
17. Si u admet deux suites extraites distinctes qui convergent vers la même limite, alors u converge.
18. Si $u_{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$ et $u_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l'$, alors $l = l'$.
19. Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$ et $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, alors $u_n \sim v_n$.
20. Si $u_n \sim v_n$, alors il existe $l \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$ et $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$.