

Suites réelles

Table des matières

1 Généralités	2
2 Limite d'une suite	2
2.1 Convergence d'une suite	2
2.2 Deux premiers résultats	3
2.3 Opérations sur les limites	4
2.4 Limites et inégalités	5
2.5 Exercice : le théorème de Césaro	5
2.6 Divergence vers $+\infty$	6
2.7 Suites extraites	7
3 Théorèmes de convergence	7
3.1 Gendarmes	7
3.2 Limite monotone	8
3.3 Suites adjacentes	8
3.4 Complément : le théorème de Bolzano-Weierstraß	9
4 Relations de comparaison des suites	9
4.1 Encore du vocabulaire	9
4.2 Quelques propriétés	9
4.3 Deux non-propriétés	10
4.4 Deux exemples	11
4.5 Suites de référence	11
4.6 Equivalents classiques	12
4.7 Un développement asymptotique	13
5 Extension aux suites complexes	13
5.1 Convergence d'une suite complexe	13
5.2 Quelques propriétés	13
5.3 Deux exemples	14

1 Généralités

On fixe ici quelques notations, définitions, et rappels :

- Une suite réelle est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{R} . L'ensemble des suites réelles est donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- Si u est une suite réelle, on note u_n plutôt que $u(n)$. Il convient de distinguer le n -ième terme de la suite u_n et la suite elle-même, que l'on peut noter u , $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou encore (u_n) .
- Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $u + v$ (resp. uv et λu) désigne la suite dont le n -ième terme vaut $(u + v)_n = u_n + v_n$ (resp. $(uv)_n = u_n v_n$ et $(\lambda u)_n = \lambda u_n$). L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est ainsi muni de deux lois de composition interne et d'une loi de composition externe¹.
- On note $u \leq v$ lorsque $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il est à noter que si on prend deux suites quelconques, on n'a pas forcément $u \geq v$ ou $u \leq v$. Exemple ?
- Une suite u sera dite *croissante* (resp. *strictement croissante*) lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n < u_{n+1}$). Même chose pour les suites *décroissantes*. Une suite sera dite *monotone* lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

BIEN ENTENDU, une suite n'est pas nécessairement monotone. **On ne verra donc jamais** de raisonnement du type "si la suite était décroissante, on aurait contradiction : la suite est donc croissante".

- Une suite u sera dite *majorée* (resp. *minorée*) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ (resp. $u_n \geq M$) pour tout $n \in \mathbb{N}$. M est alors UN majorant (resp. minorant) de (u_n) .

Une suite qui est majorée et minorée est dite *bornée*. Cela revient à dire que $(|u_n|)$ est majorée.

EXERCICE 1 Montrer que \leq est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Est-elle totale ?

EXERCICE 2 Montrer que u est bornée si et seulement si $|u|$ est majorée. ($|u|$ est par définition la suite telle que $|u|_n = |u_n| \dots$).

E désigne $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans toute la suite de ce chapitre.

2 Limite d'une suite

2.1 Convergence d'une suite

"On est autorisé à faire des dessins"...

DÉFINITION 1

- Si $u \in E$ et $l \in \mathbb{R}$, on dit que u converge vers l (ou bien u_n tend vers l lorsque n tend vers $+\infty$) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N, \quad |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

On note alors : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$.

¹Plus tard, nous dirons que muni de ces lois, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une algèbre

- S'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$, alors on dit que u est convergente ; sinon, u est dite divergente.

EXERCICE 3 Montrer que la définition précédente est équivalente à :

$$\forall \varepsilon \in]0, \frac{1}{1000!}], \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N, \quad |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

PROPOSITION 1 (unicité de la limite)

Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l_1$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l_2$, alors $l_1 = l_2$. On peut donc parler de LA limite (éventuelle) d'une suite, et noter $l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ pour dire "u admet une limite, qui est l".

REMARQUES 1

- "Divergente" ne signifie donc pas "tend vers $+\infty$ " (d'ailleurs, on ne sait encore pas ce que cela veut dire...)
- Il est aisé de vérifier que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$ si et seulement si $u_n - l \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ (le faire tout de même!)

EXERCICE 4 Soit A une partie de \mathbb{R} et $S \in \mathbb{R}$. Montrer que $S = \text{Sup } A$ si et seulement si S est un majorant de A et s'il existe une suite à valeurs dans A convergant vers S .

2.2 Deux premiers résultats

THÉORÈME 1 Toute suite convergente est bornée.

PREUVE : Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $l - 1 \leq u_n \leq l + 1$. Il reste à poser

$$M = \text{Max}(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N_0-1}|, |l - 1|, |l + 1|),$$

pour avoir $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

EXERCICE 5 (difficile!)

La réciproque est-elle vraie ?

Le résultat suivant est très utile. Dans les hypothèses, on suppose que l'on a une certaine relation "pour n assez grand", ou bien "à partir d'un certain rang" (APCR) : ce genre de condition arrive souvent quand il s'agit de limites...

PROPOSITION 2 Si $|u_n| \leq v_n$ à partir d'un certain rang avec $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

PREUVE : Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$, $|v_n| \leq \varepsilon$. Par ailleurs, il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n| \leq v_n$. Maintenant, si $n \geq \text{Max}(N_0, N_1)$, on aura : $|u_n| \leq v_n \leq \varepsilon$, et c'est gagné. ■

2.3 Opérations sur les limites

THÉORÈME 2 Soient u et v deux suites réelles tendant respectivement vers l_1 et l_2 . Soit également $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l_1 + l_2$;
- $\lambda u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda l_1$.

PREUVE : On va seulement faire la première preuve. On FIXE pour cela $\varepsilon > 0$. On sait :

$$\forall \rho > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N, \quad |u_n - l_1| \leq \rho$$

(il ne faut surtout pas utiliser la lettre ε , qui représente une variable qui a été fixée...).

En particulier pour $\rho = \frac{\varepsilon}{2}$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, on a $l_1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq u_n \leq l_1 + \frac{\varepsilon}{2}$. De même, il existe N_2 (attention, ce n'est pas forcément le même rang que pour l_1) tel que $l_2 - \frac{\varepsilon}{2} \leq v_n \leq l_2 + \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq N_2$. Maintenant, on a $l_1 + l_2 - \varepsilon \leq u_n + v_n \leq l_1 + l_2 + \varepsilon$ pour tout $n \geq \text{Max}(N_1, N_2)$, et c'est gagné. ■

REMARQUES 2

- Ces résultats resteront valables dans \mathbb{C} , mais il faut alors utiliser l'inégalité triangulaire plutôt que des encadrements.
- Si au départ on n'avait pas fait attention, et qu'on était parti de $|u_n - l_1| \leq \varepsilon$ et $|v_n - l_2| \leq \varepsilon$, on serait arrivé à $|u_n + v_n - (l_1 + l_2)| \leq 2\varepsilon$. Dans ce cas, la formule magique est "quitte à partir de $\frac{\varepsilon}{2}$ plutôt que ε au départ, on serait arrivé à une majoration par ε plutôt que 2ε à l'arrivée". De même, si on arrive à une majoration en 1515ε à la fin, c'est gagné tout de même.

THÉORÈME 3 Soient u et v deux suites réelles tendant respectivement vers l_1 et l_2 . Alors :

- $u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l_1 l_2$;
- si $l_1 \neq 0$, alors $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, et $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{l_1}$.

PREUVE : On utilisera le résultat suivant (à savoir montrer, et à retenir) :

LEMME 1 Si α est bornée et $\beta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, alors $\alpha_n \beta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Ensuite, puisque "moralement, u_n vaut à peu près l_1 ", il est raisonnable d'écrire $u_n v_n = l_1 v_n + (u_n - l_1)v_n$, et on recolle les morceaux.

Pour le deuxième point, on a $\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l_1} = \frac{l_1 - u_n}{u_n l_1}$, de sorte qu'on veut MAJORER $|l_1 - u_n|$ (facile) et MINORER $|l_1 u_n|$, ce qui est peut-être plus délicat. Heureusement, on fait un dessin, et on trouve ainsi le bon argument... ■

2.4 Limites et inégalités

THÉORÈME 4 Si u est une suite à valeurs ≥ 0 qui converge vers l , alors $l \geq 0$.

PREUVE : Reasonner par l'absurde et faire un dessin. ■

COROLLAIRE 1 "Passage des inégalités à la limite"

Si u et v convergent respectivement vers l_1 et l_2 avec $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $l_1 \leq l_2$. On dit qu'on "passe l'inégalité $u_n \leq v_n$ à la limite".

PREUVE : Considérer $v_n - u_n$. ■

EXERCICE 6 (IMPORTANT)

Le résultat est-il encore vrai si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes ? (preuve ou contre-exemple)

Des résultats du même type que celui qui suit interviennent souvent en analyse.

PROPOSITION 3 Si $u \in E$ converge vers $l > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$ pour tout $n \geq N$.

EXERCICE 7 Le résultat est-il encore vrai si on remplace les inégalités strictes par des inégalités larges ? (preuve ou contre-exemple)

2.5 Exercice : le théorème de Césaro

Le résultat qui suit est un classique parmi les classiques. Il est hors programme, mais constitue un très bon exercice.

PROPOSITION 4 Soit $u \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = \frac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \dots + u_n).$$

Montrer que si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l \in \mathbb{R}$, alors $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$.

PREUVE : On commence par traiter le cas $l = 0$. Pour cela, on fixe $\varepsilon > 0$. Il existe N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$, $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (pourquoi pas ε ? le métier, le métier...). Maintenant, pour $n \geq N_0$, on peut écrire :

$$|v_n| \leq \frac{|u_0 + u_1 + \dots + u_{N_0-1}|}{n+1} + \frac{|u_{N_0} + \dots + u_n|}{n+1}.$$

Le premier terme du second membre est de la forme $\frac{K}{n+1}$ pour une certaine constante K (n'oublions pas qu'à ce niveau du raisonnement, ε et N_0 sont FIXES), alors que le second peut être majoré (inégalité "triangulaire") par $\frac{(n - N_0 + 1)\varepsilon}{2(n+1)}$ (combien de termes sont dans la seconde somme?). On obtient

ainsi $|v_n| \leq \frac{K}{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq N_0$.

Maintenant, il existe $N_1 \geq N_0$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $\frac{K}{n+1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et alors $|v_n| \leq \varepsilon$: gagné.

Pour le cas général, on se ramène au cas particulier “par linéarité”, en posant $u'_n = u_n - l$, de sorte que $u'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, ce qui permet d’appliquer le cas que l’on vient de traiter, puis nous donne le résultat souhaité. ■

On parlera souvent de “*démonstration à la Césaro*” quand il s’agit de casser un terme en deux (il s’agit en général d’une somme (finie...), d’une série, ou d’une intégrale); un morceau étant petit pour une bonne raison, puis l’autre pour une autre raison! Ces démonstrations demandent un peu de soin, surtout chez l’analyste néophyte...

EXERCICE 8 *Réciproquement, la convergence de (v_n) implique-t-elle celle de (u_n) ? (preuve ou contre-exemple)*

2.6 Divergence vers $+\infty$

DÉFINITION 2

On dit que $u \in E$ diverge vers $+\infty$ (ou “tend vers $+\infty$ ”) et on note $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ lorsque :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N, \quad u_n \geq M.$$

EXERCICE 9 *Montrer que la définition précédente est équivalente à :*

$$\forall M \geq 1515, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N, \quad u_n \geq M.$$

On énonce “en vrac” une série de résultats correspondant à ceux énoncés dans les cas de convergence. Ils sont intuitivement clairs, et leurs preuves sont de bons exercices (lire : “des questions de khôlle faciles”).

PROPOSITION 5

- Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, alors u n’est pas majorée (mais la réciproque est fautive : donner un contre-exemple).
- Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, alors u_n est divergente (y’a quelque chose à prouver ? Ben oui !)
- Si (u_n) est minorée (a fortiori si (u_n) est convergente) et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ alors $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.
- Si (u_n) est minorée à partir d’un certain rang par $m > 0$ (a fortiori si (u_n) est convergente vers $l > 0$) et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ alors $u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.
- Si (u_n) est majorée à partir d’un certain rang par $M < 0$ (a fortiori si (u_n) est convergente vers $l < 0$) et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ alors $u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$.
- Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.
- Si $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0^+$ (ce qui signifie : $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ avec $v_n > 0$ APCR), alors $\frac{1}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.

EXERCICE 10 *Enoncer et prouver un “théorème de Césaro” dans le cas d’une divergence vers $+\infty$.*

On laisse au lecteur le soin de définir la divergence vers $-\infty$, ainsi que d’énoncer et prouver les résultats analogues à ceux qui précèdent.

2.7 Suites extraites

DÉFINITION 3

Une *suite extraite* de $u \in E$ est une suite v dont le terme général est de la forme $v_n = u_{\varphi(n)}$, où φ est une injection croissante de \mathbb{R} .

EXEMPLE 1 *En pratique, on rencontrera souvent les extractions $(u_{n+1})_{n \geq 0}$ (suite décalée d’un indice), $(u_{2n})_{n \geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ (termes pairs et impairs d’une suite).*

REMARQUE 3 BIEN ENTENDU, on ne dira jamais “ $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$ pour n pair”, c’est-à-dire “ u converge vers l pour n pair” (la convergence de u vers l ne dépend ni de n , ni de k ni de l’âge du capitaine. . .).

Lorsqu’une suite converge ou diverge vers $\pm\infty$, on obtient des informations sur TOUTES les suites extraites. A contrario, le comportement de certaines suites extraites peuvent donner des informations (positives ou négatives) quant à la convergence de la suite.

THÉORÈME 5 *Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$ et v est extraite de u , alors $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$.*

COROLLAIRE 2 *Si u admet deux suites extraites qui tendent vers deux limites différentes, alors u n’admet pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

EXEMPLE 2 *Pour montrer que la suite u de terme général $u_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ diverge, on note que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent respectivement vers 1 et -1 .*

EXERCICE 11 *Montrer que si $u_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$.*

3 Théorèmes de convergence

3.1 Gendarmes

PROPOSITION 6 *Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ APCR avec (u_n) et (w_n) convergentes vers la même limite $l \in \mathbb{R}$, alors (v_n) est également convergente, de limite l .*

REMARQUE 4 Ce résultat s’applique en particulier au cas où l’une des deux suites (u_n) ou (w_n) est constante.

On donne également l’énoncé correspondant à la divergence vers $+\infty$: on a besoin d’un seul gendarme.

PROPOSITION 7 *Si $u_n \leq v_n$ APCR avec $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, alors $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.*

3.2 Limite monotone

THÉORÈME 6 Soit u une suite réelle croissante. Alors :

- ou bien u est majorée, et elle est alors convergente ;
- ou bien u diverge vers $+\infty$.

PREUVE : Dans le premier cas, on montre que u converge vers la borne supérieure S de ses valeurs. ■

REMARQUE 5 En pratique (pour montrer une convergence), on retiendra souvent l'énoncé : "toute suite croissante majorée est convergente". Il faut cependant bien comprendre que le deuxième cas est utile (pour prouver une divergence vers $+\infty$), simple à prouver, mais n'est pas une conséquence immédiate du premier : UNE SUITE QUI NE CONVERGE PAS N'A A PRIORI AUCUNE RAISON DE TENDRE VERS $+\infty$.

EXERCICE 12 Etudier u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.3 Suites adjacentes

THÉORÈME 7 Soient u et v deux suites réelles telles que :

- u est croissante et v décroissante ;
- la différence $v - u$ converge vers 0.

(on dit que u et v sont adjacentes). Alors u et v convergent vers une limite commune.

PREUVE : Déjà, $v - u$ est décroissante puis positive (pourquoi?). Ensuite, u est majorée par... une certaine constante (exemple? BIEN ENTENDU, v_n n'est pas une constante...), donc converge; même chose pour v , et on obtient l'égalité des limites en considérant $v_n - u_n$ (préciser!). ■

L'exemple suivant est archi classique. On n'imagine pas qu'un taupin ait pû ne jamais le rencontrer.

EXEMPLE 3 Si on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $T_n = S_n + \frac{1}{n \cdot n!}$, alors on montre sans mal que les deux suites S et T sont adjacentes. La limite commune est e ($\exp(1)$), mais c'est une autre histoire...

Du même tonneau, on a le résultat suivant (dont on peut TOUJOURS se passer à moindre frais)

PROPOSITION 8 Soit (I_n) une suite de segments emboîtés, c'est-à-dire d'intervalles $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$ tels que $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout n , avec $\beta_n - \alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est un singleton (en particulier, cette intersection est non vide).

EXERCICE 13 On donnera un contre-exemple, dans le cas où on n'impose pas aux I_n d'être fermés.

3.4 Complément : le théorème de Bolzano-Weierstraß

Bien souvent en analyse, on a besoin de suites qui, à défaut d'être convergentes, admettent des suites extraites convergentes. Le résultat suivant donne une réponse positive quoique non constructive à cette demande...

THÉORÈME 8 Soit u une suite réelle bornée. Alors il existe une injection croissante de \mathbb{N} en \mathbb{N} telle que $(u_{\varphi(n)})$ est convergente.

Ce résultat est hors programme. On pourra le prouver grâce à une dichotomie, qui fournit des segments emboîtés dans chacun desquels se trouvent une infinité de termes de la suite.

4 Relations de comparaison des suites

Les suites de terme général $\frac{1}{\ln n}$ et $\frac{1}{n!}$ convergent toutes les deux vers 0, mais "il y en a une qui converge plus vite que l'autre". A contrario, les suites de terme général $\frac{1}{n^3}$ et $\frac{1}{n^3 + 1515}$ tendent vers 0 "à peu près à la même vitesse". On va préciser dans ce chapitre ces deux notions.

4.1 Encore du vocabulaire

DÉFINITION 4

Soient α une suite de réels **non nuls** et u une suite de réels. On dit que :

- u est *négligeable* devant α et on note $u = o(\alpha)$ lorsque $\frac{u_n}{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$;
- u est *dominée* par α et on note $u = O(\alpha)$ lorsque $\left(\frac{u_n}{\alpha_n}\right)_{n \geq 0}$ est bornée ;
- u est *équivalente* à α et on note $u_n \sim \alpha_n$ lorsque $\frac{u_n}{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

REMARQUES 6

- Ainsi, il est équivalent de dire " u est bornée" (resp. tend vers 0) est " $u_n = O(1)$ " (resp. $u_n = o(1)$).
- $u_n = o(\alpha_n)$ implique évidemment $u_n = O(\alpha_n)$.
- Dans les trois définitions, on peut se contenter que α_n soit non nul APCR.
- Si $u_n \sim \alpha_n$, alors u_n est non nul APCR (pourquoi?), et $\alpha_n \sim u_n$.
- D'après les définitions, une suite ne sera JAMAIS négligeable devant, dominée par ou équivalente à la suite nulle **BIEN ENTENDU**.
- $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$ (pourquoi?) ; on note alors : $u_n = v_n + o(v_n)$.

4.2 Quelques propriétés

PROPOSITION 9 Composition des comparaisons

Soient u, v, w trois suites de réels non nuls :

- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = O(w_n)$.

- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n = O(w_n)$.

PREUVE : En faire une ou deux! ■

PROPOSITION 10 Comparaisons de sommes et de produits

Soient u, v, w, z quatre suites de réels (les w_n étant non nuls) :

- Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n + v_n = O(w_n)$.
- Si u, v, w, z sont à valeurs non nulles avec $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim z_n$, alors $u_n v_n \sim w_n z_n$ et $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{w_n}{z_n}$.

PREUVE : Idem! ■

4.3 Deux non-propriétés

Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim z_n$ alors on n'a pas forcément $u_n + w_n \sim v_n + z_n$: par exemple, on peut prendre $u_n = 1 + 1/n$, $v_n = 1$, $w_n = -1$ et $z_n = -1 + 1/n^2$.

Pour résumer (sobrement) :

ON NE SOMME PAS LES EQUIVALENTS

En fait, les soucis arrivent lorsque l'on fait la différence de deux expressions du même ordre. On peut alors s'en sortir grâce à la proposition 10 en sommant des termes négligeables devant une même suite.

EXEMPLE 4 Si $u_n \sim 2n$ et $v_n \sim 3n$ alors $u_n = 2n + o(n)$ et $v_n = 3n + o(n)$ donc $w_n = 5n + o(n) \sim 5n$.

Il faut comprendre qu'écrire $e^{1/n} \sim 1 + \frac{2}{n}$ est EXACT (les deux membres sont équivalents à 1), GROTESQUE (puisque l'on a également $e^{1/n} \sim 1 + \frac{1}{n} \sim 1 + \frac{1515}{n^{1789}}$: dans un équivalent, il est inutile de mettre deux termes d'ordre différent), mais surtout DANGEREUX, puisque l'on a envie d'en "déduire" $e^{1/n} - 1 \sim \frac{2}{n}$, qui est cette fois une proposition FAUSSE.

Notons également que si $u_n \sim v_n$, on n'a pas forcément $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ (prendre $u_n = n$ et $v_n = n + 1$). Bref :

ON NE PASSE PAS LES EQUIVALENTS A L'EXPONENTIELLE

REMARQUE 7 Ceux qui veulent passer les équivalents au logarithme sont priés d'attendre un prof plus compréhensif ... En attendant, ils justifieront systématiquement (de façon plus convaincante que par "Ben je l'ai vu le résultat dans le Bréal..."). Après une dizaine de justifications, on finit par savoir dans quels cas c'est licite ...

4.4 Deux exemples

Les deux exemples suivants sont très classiques (surtout le second, que tout taupin rencontre fréquemment).

EXERCICE 14 On reprend les notations de l'exemple 3. Montrer :

$$e - S_n \sim \frac{1}{n \cdot n!} \quad \text{et} \quad T_n - e \sim \frac{1}{n^3 \cdot n!}.$$

SOLUTION : Pour le premier équivalent, on placera sur un dessin u_n, u_{n+1}, v_n et e , ce qui inspirera quelques inégalités... Pour le second, il y aura un peu plus de travail...

EXERCICE 15 Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$. Montrer que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

PREUVE : On montrera successivement :

- $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante;
- $I_n \sim I_{n+2}$ (on trouve une relation entre les deux en intégrant deux fois par parties I_n);
- $I_n \sim I_{n+1}$ (partir de $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$);
- $(n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■

COROLLAIRE 3 Equivalent de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

PREUVE : On admet (provisoirement) qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $n! \sim Kn^{n-1/2}$, et on calcule K en exprimant les intégrales de Wallis grâce à des factorielles et en utilisant l'équivalent calculé plus haut. ■

4.5 Suites de référence

On va ici comparer les *suites de référence* suivantes, d'abord à l'intérieur d'une même classe, puis entre deux classes : a^n ($a > 0$), n^α et $(\ln n)^\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), $n!$ et n^n .

PROPOSITION 11

- Si $0 < a < b$, alors $a^n = o(b^n)$;

- si $\alpha_1 < \alpha_2$, alors $n^{\alpha_1} = o(n^{\alpha_2})$;
- si $\beta_1 < \beta_2$, alors $(\ln n)^{\beta_1} = o((\ln n)^{\beta_2})$.

PROPOSITION 12 “Lorsqu’il y a combat, ce sont les exponentielles qui l’emportent sur les polynômes, qui l’emportent eux-mêmes sur les logarithmes” :

$$a^n \underset{a < 1}{\ll} n^\alpha \underset{\alpha < 0}{\ll} (\ln n)^\beta \underset{\alpha' > 0}{\ll} n^{\alpha'} \underset{b > 1}{\ll} b^n \ll n! \ll n^n.$$

On a utilisé ici la notation $u_n \ll v_n$ qui signifie $u_n = o(v_n)$.

On pourra utiliser le résultat suivant, qu’il faut absolument savoir montrer :

LEMME 2 Si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} k \in [0, 1[$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

4.6 Equivalents classiques

Les résultats qui suivent seront établis en bonne partie après le cours sur la dérivation. On suppose $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, et on va exprimer (pour certaines fonctions f), $f(u_n)$ comme somme de termes “de plus en plus précis”.

Plutôt d’écrire par exemple $\sin u_n - u_n \sim -\frac{u_n^3}{6}$, on écrira de préférence

$$\sin u_n = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3).$$

p est ici un entier strictement positif FIXE.

PROPOSITION 13

- $(1 + u_n)^\alpha = 1 + \alpha u_n + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} u_n^2 + \dots + \binom{\alpha}{p} u_n^p + o(u_n^p)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, et

$$\binom{\alpha}{p} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - p + 1)}{p!} \text{ (généralisation des } C_n^k \text{)}.$$

- $\frac{1}{1 - u_n} = 1 + u_n + u_n^2 + \dots + u_n^p + o(u_n^p)$.
- $e^{u_n} = 1 + u_n + \frac{u_n^2}{2!} + \dots + \frac{u_n^p}{p!} + o(u_n^p)$.
- $\ln(1 + u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{p-1} u_n^p}{p} + o(u_n^p)$.
- $\sin u_n = u_n - \frac{u_n^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^p}{(2p + 1)!} u_n^{2p+1} + o(u_n^{2p+1})$.
- $\cos u_n = 1 - \frac{u_n^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^p}{(2p)!} u_n^{2p} + o(u_n^{2p})$.
- $\tan u_n = u_n + \frac{1}{3} u_n^3 + \frac{2}{15} u_n^5 + o(u_n^6)$.

EXERCICE 16 IMPORTANTISSIME

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$.

4.7 Un développement asymptotique

EXERCICE 17 Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe une unique solution en x de $\tan x = x$ dans l'intervalle $]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$. On la notera x_n .

Montrer ensuite :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi n} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

SOLUTION :

- Pour l'existence, on fera un dessin et on étudiera une bonne fonction sur un bon intervalle.
- $x_n \sim n\pi$ est évident grâce à l'inégalité $n\pi - \pi/2 < x_n < n\pi + \pi/2$ que l'on divise par $n\pi$. On écrit alors $x_n = n\pi + y_n$ avec $y_n \in]-\pi/2, \pi/2[$.
- On réinjecte l'expression précédente dans l'équation $\tan x_n = x_n$ pour obtenir la limite de $\tan y_n$ puis de y_n (soigneusement).
- On continue sur le même principe.

5 Extension aux suites complexes

5.1 Convergence d'une suite complexe

DÉFINITION 5

On dit qu'une suite complexe $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N, \quad |z_n - l| \leq \varepsilon.$$

En d'autres termes, la suite complexe (z_n) converge vers l si et seulement si la suite réelle $(|z_n - l|)$ tend vers 0.

PROPOSITION 14 Si une suite complexe converge vers l_1 et l_2 , alors $l_1 = l_2$.

Il y a donc là encore unicité de la limite.

5.2 Quelques propriétés

Le premier résultat est essentiel : il ramène l'étude d'une suite complexe à celle de deux suites réelles.

PROPOSITION 15 Si $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, on a $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l_1 + il_2$ si et seulement si $\operatorname{Re} z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l_1$ et $\operatorname{Im} z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l_2$.

On montre alors facilement les résultats suivants :

PROPOSITION 16

- Toute suite complexe convergente est bornée (c'est-à-dire : son module est borné).
- Si $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L_1$, $w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L_2$, et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\lambda z_n + w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda L_1 + L_2$.
- Si $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et (w_n) est bornée, alors $z_n w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.
- Si $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L_1$ et $w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L_2$ alors $z_n w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L_1 L_2$.

- Si $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L \neq 0$ alors $z_n \neq 0$ APCR et $\frac{1}{z_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{L}$.

PROPOSITION 17 Parler d'une suite complexe croissante est grotesque...

5.3 Deux exemples

L'exercice suivant fournit un générateur d'exercices mystérieux de terminale.

EXERCICE 18 Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et z une suite vérifiant $z_{n+1} = az_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on parle de suites arithmético-géométrique).

En fonction de a, b et z_0 , déterminer le comportement de la suite après en avoir calculé le terme général.

Lorsque $a \neq 1$, on commencera par montrer qu'il existe un unique $l \in \mathbb{C}$ tel que $l = al + b$. Ensuite, on considèrera $w_n = z_n - l$...

EXEMPLE 5 Traiter les cas suivants :

- $z_0 = 2 + i$ et $z_{n+1} = (1 - i)z_n + i$;
- $z_0 = i$ et $z_{n+1} = jz_n + 2i$;
- $z_0 = 3$ et $z_{n+1} = \frac{z_n}{2} + 3$.

EXERCICE 19 Suites de Julia-Mandelbrot

Pour $C \in \mathbb{C}$ fixé, on définit une suite de complexes $(z_n)_{n \geq 0}$ par récurrence : $z_0 = C$, et $z_{n+1} = z_n^2 + C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Si $|z_{n_0}| > 2$ et $|C| \leq 2$ alors $|z_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$;
- si $|C| > 2$, montrer que $|z_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.

REMARQUE 8 Dans l'exercice précédent, toute personne fournissant une condition nécessaire et suffisante simple sur C pour que (z_n) converge, accèdera rapidement à la gloire...