Corps des réels

1 Quelques inégalités

EXERCICE 1 Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer :
- $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$;
- $1 + |xy-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|)$.

EXERCICE 2 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right| \leq 2$.

EXERCICE 3 Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$. En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{k}{n^2}\Big)$.

EXERCICE 4 *Inégalité de Cauchy-Schwarz*
Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Etablir l'inégalité :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)^{1/2}$$

Donner de plus une CNS simple pour avoir égalité.

On pourra considérer l'application $\varphi : \lambda \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + y_i)^2$.

2 Bornes supérieures et inférieure

EXERCICE 5 Soient a et b sont deux réels tels que pour tout $\varepsilon > 0$, $a \leq b + \varepsilon$. Montrer : $a \leq b$.
Les pipologies du genre "on fait tendre ε vers 0" ne sont pas les bienvenues...

EXERCICE 6 A et B sont deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$. On note $A+B$ l'ensemble des réels de la forme $a+b$, où $a \in A$ et $b \in B$. Même chose pour $A-B$ et AB. De même, $-A$ désigne l'ensemble des $-a$ pour $a \in A$.

Etablir les relations suivantes :
- $\mathrm{Sup}\,(A+B) = \mathrm{Sup}\ A + \mathrm{Sup}\ B$;
- $\mathrm{Sup}\,(-A) = -\,\mathrm{Inf}\ A$ et $\mathrm{Inf}\,(-A) = -\,\mathrm{Sup}\ A$;
- $\mathrm{Sup}\,(A-B) = \mathrm{Sup}\ A - \mathrm{Inf}\ B$;
- si $A, B \subset \mathbb{R}^+$, $\mathrm{Sup}\,(AB) = (\mathrm{Sup}\ A)(\mathrm{Sup}\ B)$. Le résultat est-il encore valable sans l'hypothèse $A, B \subset \mathbb{R}^+$?

Que dire de $\mathrm{Sup}\,(A \cup B)$ en fonction de $\mathrm{Sup}\ A$ et $\mathrm{Sup}\ B$?

EXERCICE 7 A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}^+$. $\sqrt{A}$ désigne l'ensemble des $\sqrt{x}$, pour $x \in A$. Montrer : $\mathrm{Sup}\,\sqrt{A} = \sqrt{\mathrm{Sup}\ A}$.

EXERCICE 8 (**)
Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de :

$$E = \big\{\cos n \;\big|\; n \in \mathbb{N}\big\}.$$

On pourra considérer $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 9 (**)

Soit f une application croissante de $[0,1]$ dans lui-même. Montrer que f admet un point fixe : il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

On pourra considérer la borne supérieure S des $x \in [0,1]$ tels que $f(x) \geq x$, et montrer que $f(S) \geq S$ et $f(S) \leq S$.

3 Partie entière

Exercice 10 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer les relations suivantes :
- $0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n-1$ (exhiber des cas d'égalité) ;
- $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$;
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E(x+k/n) = E(nx)$.

Exercice 11 Montrer :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x) + E(2y).$$

4 Divers

Exercice 12 Montrer que la relation d'inclusion $\subset$ induit une relation d'ordre non total sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Et sur $\mathcal{P}(E)$ avec E un ensemble quelconque ? ? ?

Exercice 13 L'intersection de deux intervalles est-elle un intervalle ? et la réunion ?

Exercice 14
- Soient $x, y \in \mathbb{Q}$. Que dire de $x+y$ et xy ?
- Même chose avec $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- Même chose avec $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 15 Déterminer l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non nulles telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$.

On pourra montrer qu'une telle application est nécessairement positive sur $\mathbb{R}^+$, puis croissante sur $\mathbb{R}$...