# Corps des réels

## Table des matières

# 1 Présentation de $\mathbb{R}$

## 1.1 Propriétés de $\mathbb{R}$

PROPOSITION 1 *On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{R}$ muni de deux lois de composition interne $+$ et $.$ commutatives, et d'une relation binaire $\leq$ telles que :*
- $(\mathbb{R},+)$ *est un groupe commutatif de neutre 0.*
- $(\mathbb{R}^*,.)$ *est un groupe commutatif de neutre 1.*
- *La loi . est distributive par rapport à $+$.*
- $\leq$ *est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.*
- *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.*

REMARQUES 1
- Les trois premiers points résument les "règles usuelles de calcul dans $\mathbb{R}$" ... Nous reviendrons sur la notion de *groupe* dans un chapitre ultérieur.
- Une relation d'ordre est une relation $R$ *réflexive* ($xRx$ pour tout $x$), *antisymétrique* (si $xRy$ et $yRx$, alors $x=y$) et *transitive* (si $xRy$ et $yRz$, alors $xRz$). Dire que l'ordre est total signifie que si on prend deux éléments $x$ et $y$, alors on a $xRy$ ou $yRx$. Un exemple d'ordre non total sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est l'inclusion (cf. feuille d'exercices).
- Les "bornes supérieures" seront définies dans la deuxième partie.

## 1.2 Valeur absolue

DÉFINITION 1
Si $x\in\mathbb{R}$, on définit la *valeur absolue* de $x$ par $|x|=\begin{cases} x & \text{si } x>0 \\ -x & \text{sinon}\end{cases}$

PROPOSITION 2 *Pour tout $x,y\in\mathbb{R}$, on a :*
- $|xy|=|x|\,|y|$ *et si* $y\neq 0$ : $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$ ;
- $|x+y|\leq|x|+|y|$ *: c'est L'*inégalité triangulaire. *De plus, il y a égalité si et seulement si $x$ et $y$ sont de même signe (au sens large).*

EXERCICE 1 *Il paraît que les inégalités suivantes, valables pour tout $x,y\in\mathbb{R}$, sont tout à fait essentielles*[1] *:*

$$|x-y|\leq|x|+|y|\,,\qquad \big||x|-|y|\big|\leq|x+y|\,.$$

*Le lecteur les établira à titre d'exercice, avant de les oublier bien vite.*

REMARQUE 2 En 843, tout ceux qui utiliseront "une inégalité triangulaire" qui n'est pas "**L**'inégalité triangulaire" seront priés de la prouver auparavant. En revanche, le lecteur pourra énoncer et prouver une inégalité triangulaire concernant $n\geq 2$ réels, en précisant les cas d'égalité.

# 2 Bornes supérieure et inférieure

## 2.1 Définition

DÉFINITION 2
On dit qu'une partie $A$ de $\mathbb{R}$ est majorée lorsqu'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que tous les éléments de $A$ sont inférieurs ou égaux à $M$. On dit alors que $M$ est **UN** majorant de $A$.

REMARQUE 3 BIEN ENTENDU, il est GROTESQUE de parler DU majorant d'une partie, puisqu'il n'y a JAMAIS unicité d'un éventuel majorant (si $M$ est un majorant, alors $M+1515$ également).

[1] il sera cependant possible de suivre le cours d'analyse de cette année sans connaître celles-ci...

Les définitions et propositions seront systématiquement données dans le cas des bornes *supérieures*. C'est un exercice élémentaire mais important d'écrire les définitions et propositions équivalentes dans le cas des bornes inférieures.

Avant de commencer, il convient de se poser la question suivante :

*Quel est le plus grand élément de $\mathbb{R}_*^-$ ?*

Du même type :

EXERCICE 2 *Montrer que l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 1515\}$ est majoré mais n'admet pas de maximum, c'est-à-dire : il n'existe pas de $m \in E$ tel que $m \geq x$ pour tout $x \in E$. Qu'en est-il de $F = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \leq 1515\}$ et $G = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 \leq 1515\}$ ?*

Ainsi, une partie de $\mathbb{R}$ (même majorée) n'admet pas forcément de maximum ... On va donc introduire la notion de *borne supérieure*. Comme d'habitude, les dessins seront souvent salutaires pour comprendre cette notion.

DÉFINITION 3
Soit $X$ une partie de $E$. On dit que $S \in \mathbb{R}$ est la[2] borne supérieure de $X$ si et seulement si :
- $S$ est un majorant de $X$ ;
- pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que $S - \varepsilon \leq x$.

REMARQUE 4 On sait (premier résultat de ce chapitre) que toute partie non vide de $\mathbb{R}$ qui est majorée admet une borne supérieure. Cette propriété est en fait *à la base* de la construction de $\mathbb{R}$, largement hors programme, donc admise.

## 2.2 Une caractérisation essentielle

PROPOSITION 3 *Si $X$ admet $S$ comme borne supérieure, alors $S$ est un majorant de $X$ qui est inférieur ou égal à tous les autres majorants : "$S$ est le plus petit des majorants de $X$".*

COROLLAIRE 1 *Si $X$ admet une borne supérieure, alors elle est unique (ce qui justifie de parler de LA borne supérieure). On note* $\operatorname{Sup} X = S$.

REMARQUE 5 D'après la définition d'une borne supérieure et la propriété de $\mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ admet une borne supérieure si et seulement si $X$ est majoré. Dans le cas contraire, on note : $\operatorname{Sup} X = +\infty$.

Le résultat suivant fournit le cadre le plus simple pour exhiber une borne supérieure.

PROPOSITION 4 *Si $X$ admet un maximum $m$, alors ce maximum est la borne supérieure de $X$. Réciproquement, si $X$ admet une borne suupérieure $S$ qui est dans $X$, alors $S$ est en fait le maximum de $X$.*

PREUVE : A faire soigneusement ! ■

EXERCICE 3 *Déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants (le cas échéant, signaler s'il s'agit de maxima ou minima) :*

$$\begin{aligned} E_1 = &\quad \left\{1 - \frac{2}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\} \\ E_2 = &\quad \left\{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{N}^*\right\} \\ E_3 = &\quad \left\{1 + \frac{1}{n-m} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq m\right\} \end{aligned}$$

*Comparer $E_1$ et $E_2$.*

[2] on ne peut pas encoreparler de *la* borne supérieure

### 2.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 4

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un ensemble de la forme $[\alpha,\beta]$, $]\gamma,\beta]$, $[\alpha,\delta[$, ou $]\gamma,\delta[$, avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\gamma\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $\delta\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Remarque 6 La signification de ces ensembles est supposée connue ! Par exemple, $]-2,15]$ désigne l'ensemble des $x\in\mathbb{R}$ tels que $-2<x\leq 15$, alors que $]-\infty,1515]$ désigne l'ensemble des réels $\leq 1515$, etc... A priori, il est grotesque d'écrire $x>-\infty$...

La définition et la proposition suivante constituent un bon exercice, difficile cependant. Il est inutile d'en lire la preuve avant d'avoir réfléchi soit-même aux problèmes qui se posent.

Définition 5

Une partie $X$ de $\mathbb{R}$ est dite *convexe* si et seulement si pour tout $x,y\in X$ tels que $x,y\in X$, on a $[x,y]\subset X$.

Proposition 5 *Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Preuve : Déjà, on vérifie soigneusement que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont convexes.

Ensuite, on fixe une partie convexe $X$ de $\mathbb{R}$, et on note $\alpha\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $\beta\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ ses bornes inférieure et supérieure, éventuellement infinies. Il faut alors distinguer bien des cas (ce qui est normal, vu les nombreux types d'intervalles). Si par exemple $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, avec $\alpha\in X$ et $\beta\notin X$, alors on prouve : $X=[\alpha,\beta[$... ■

## 3 Partie entière

### 3.1 Définition

Proposition 6 *Pour tout $x\in\mathbb{R}$, il existe un unique $n\in\mathbb{Z}$ tel que $n\leq x<n+1$. On dit que $n$ est la partie entière de $x$, et on note $n=E(x)$, ou bien $n=\lfloor x\rfloor$ (notation anglo-saxonne).*

Preuve : On fait un dessin. Une propriété issue de la construction de $\mathbb{R}$ ("$\mathbb{R}$ est archimédien") assure l'existence d'un $p\in\mathbb{N}$ tel que $p>x$. On considère alors $p_0$ le plus petit de ces $p$ : il vérifie $p_0>x$, et $p_0-1\leq x$ (sans quoi $p_0$ ne serait pas le plus petit $>x$...). L'entier $n=p_0-1$ convient alors.

Pour l'unicité, il suffit de soustraire deux doubles inégalités, pour obtenir un entier strictement compris entre $-1$ et $1$, ce qui lui impose d'être nul... ■

Remarques 7

- Pour montrer que $E(x)=p$, il suffit de montrer que $p\in\mathbb{Z}$ et $x-1<p\leq x$ : pourquoi ?
- On définit également $\lceil x\rceil$ le plus petit entier $\geq x$, tel que : $x\leq\lceil x\rceil<x+1$. Pour $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on a $\lceil x\rceil=\lfloor x\rfloor+1$.

### 3.2 Approximations décimales d'un réel

Si $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, on a $E(10^nx)\leq 10^nx<E(10^nx)+1$, de sorte que $\dfrac{E(10^nx)}{10^n}\leq x<\dfrac{E(10^nx)+1}{10^n}\cdot$ Si on note $d_n=\dfrac{E(10^nx)}{10^n}$ et $e_n=d_n+\dfrac{1}{10^n}$, on a donc $d_n\leq x<e_n$ avec $d_n$ et $e_n$ deux décimaux tels que $e_n-d_n$ (mais aussi $x-d_n$ et $e_n-x$) est inférieur ou égal à $10^{-n}$ : on dit que $d_n$ (resp. $e_n$) est l'approximation décimale de $x$ par défaut (resp. excès) à $10^{-n}$ près.

Remarque 8 Le point de vue adopté ici permet de "tout faire avec la partie entière". En fait, l'approximation par excès de $x$ se définit généralement par $\widetilde{e}_n=\dfrac{\lceil 10^nx\rceil}{10^n}$ : cette nouvelle définition coïncide avec la précédente lorsque $10^nx$ est irrationnel ; sinon, $e_n=\widetilde{e}_n+10^{-n}$.

On peut maintenant établir le résultat suivant, qui dit qu'on trouve des rationnels (mais aussi des irrationnels) dans tout intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Ce n'est pas le cas pour les entiers (il n'en n'existe pas dans $[1/3, 2/3]$...).

EXERCICE 4 Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
*Tout intervalle non trivial*[3] *de* $\mathbb{R}$ *contient un rationnel et un irrationnel.*

SOLUTION : Considérons un intervalle non trivial $I$. Il contient deux éléments distincts $\alpha$ et $\beta$ (on fait alors un dessin...). Considérons $\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ : on ne sait pas si $\gamma$ est rationnel ou irrationnel. Par contre, on sait que chaque $\gamma_n = \dfrac{\lfloor 10^n\gamma \rfloor}{10^n}$ est rationnel, avec $\gamma - 10^{-n} \leq \gamma_n < \gamma$. Pour $n$ assez grand, on aura (pourquoi ?) $\gamma_n \in I$, ce qui nous fournit un rationnel dans $I$.

Pour trouver un irrationel, on va utiliser le :

LEMME 1 $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

PREUVE : Si $\sqrt{2}$ était rationnel, on pourrait écrire $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, avec la fraction "sous forme irréductible", c'est-à-dire "non simplifiable". Maintenant, on peut écrire $p^2 = 2q^2$. $p^2$ est donc pair, donc $p$ également (pourquoi ?), donc $q$ est impair (pourquoi ?). Mais $p = 2r$, donc $q^2 = 2r^2$ donc $q^2$ puis $q$ est pair : la fraction $\dfrac{p}{q}$ était en fait simplifiable, et on a notre absurdité. ■

Une conséquence de ce lemme est que $\dfrac{\sqrt{2}}{10^n}$ est irrationnel, mais également $\lambda_n = \gamma_n + \dfrac{\sqrt{2}}{10^n}$ (pourquoi ?). Or $\lambda_n \in I$ pour $n$ assez grand (pourquoi ?) : c'est gagné ! ■

# 4 Annexe : deux résultats classiques

## 4.1 Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

PROPOSITION 7 *Soit $G$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in G$, on a $x - y \in G$ (on dit qe $G$ est un* sous-groupe *de $\mathbb{R}$). Montrer qu'on est dans l'une des deux situations suivantes :*
- *$G$ est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$, pour un certain $\alpha > 0$.*
- *$G$ est dense dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie que tout intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ contient un élément de $G$.*

PREUVE : (difficile)

On montrera d'abord (facile) que $G$ contient 0 et est symétrique par rapport à 0 ($x \in G \Rightarrow -x \in G$). Ensuite, on notera $I$ la borne inférieure de $G \cap \mathbb{R}_*^+$, et on distinguera deux cas :
- Si $I > 0$, on montre d'abord que $I \in G$ (si ce n'était pas le cas, on trouverait $x \in G$ tel que $I < x < 2I$ puis $y \in G$ tel que $I < y < x$, et $x - y$ poserait problème...). On montre alors que $I\mathbb{N} \subset G$, puis $I\mathbb{Z} \subset G$. Pour l'autre inclusion, on fixe $x \in G$. On veut montrer que $x$ est de la forme $nI$ pour un certain entier $n \in \mathbb{Z}$. Il semble raisonnable de POSER $n = \lfloor x/I \rfloor$ puis de MONTRER : $x = nI$. Pour cela, on fait un dessin... et on considère $x - nI$.
- Si $I = 0$, on montre que $G$ est dense. Pour cela, on considère un intervalle $J$ de $\mathbb{R}$, et on va montrer qu'il contient un élément de $G$. Si $0 \in J$, c'est gagné. Sinon, $J \subset \mathbb{R}_*^+$ ou $J \subset \mathbb{R}_*^-$. On se place dans le premier cas. Il existe deux éléments $\alpha < \beta$ dans $J$. Il existe un élément $\rho$ de $G$ tel que $0 < \rho \leq \dfrac{\beta - \alpha}{2}$ (pourquoi ?) ; on a alors $\rho\mathbb{Z} \subset G$. Mais sur un dessin, il semblerait bien que $\rho\mathbb{N}$ intersecte $J$. Pour le prouver, on considère $n_0$ le plus petit entier tel que $n_0\rho \geq \alpha$ (c'est-à-dire $n_0 = \lceil \alpha/\rho \rceil$), et on montre : $\alpha \leq n_0\rho \leq \beta$.

■

[3] c'est-à-dire non réduit à un singleton

Remarque 9 Ce résultat peut sembler un peu théorique, mais a en fait de vrais applications. Par exemple, il permet de montrer que l'ensemble $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ (constitué des réels de la forme $n + 2\pi m$, avec $n, m \in \mathbb{Z}$) est dense dans $\mathbb{R}$, ce qui permet par exemple de montrer que la suite de terme général $u_n = \cos n$ ne converge pas (et même bien mieux. . . ).

On pourra montrer le résultat plus fort suivant : $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ est dense si et seulement si $\dfrac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$.

### 4.2 Endomorphismes monotones de $(\mathbb{R}, +)$

Proposition 8 *Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (on dit que $f$ est un* endomorphisme *de $(\mathbb{R}, +)$. On suppose de plus $f$ monotone. Montrer que $f$ est de la forme $t \mapsto at$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$.*

Preuve : Déjà, on montre que $f$ est impaire. Ensuite, le $a$ RECHERCHE est NECESSAIREMENT égal à $f(1)$. On va donc POSER $a = f(1)$, puis montrer la relation $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{N}$, puis $x \in \mathbb{Z}$, puis $x \in \mathbb{Q}$, et enfin pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour ce dernier point, on pourra "approcher $x$ par des rationnels", et distinguer selon le sens de variation de $f$. ■

Corollaire 2 *Si $f$ est une application monotone de $\mathbb{R}_*^+$ dans lui-même telle que pour tout $x, y > 0$, $f(xy) = f(x)f(y)$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f$ soit l'application $t \mapsto t^\alpha$.*

Preuve : Qu'est-ce qui change les sommes en produits ? et réciproquement ? ■

On pourra également déterminer les applications monotones de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_*^+$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.