# Intégrales multiples

EXERCICE 1 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$, avec $D$ défini par : $x^2+y^2 \leq |x|$. ($I=(2-\sqrt{2})\frac{\pi}{2}$)
2. $\displaystyle\iiint_K xyzdxdydz$ avec $K=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2 \leq R \text{ et } x,y,z \geq 0\}$.
   Réponse : $\dfrac{R^6}{48}$.

EXERCICE 2 $E$ est une ellipse de centre $O$, et $F$ est l'image de cette ellipse par la rotation de centre $O$ et d'angle $\pi/2$. Déterminer l'aire de $E \cap F$.

EXERCICE 3 Déterminer l'aire de l'intérieur de la cardioïde d'équation $\rho = 1+\cos\theta$.

EXERCICE 4 Représenter et déterminer l'aire de la partie de $\mathbb{R}^2$ :

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,\sqrt{x}+\sqrt{y}\geq 1 \text{ et } \sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}\geq 1\}.$$

EXERCICE 5 (**)

Calculer le volume de l'intersection $K$ du cylindre d'équation $x^2+y^2-ay\leq 0$ et de l'ellipsoïde d'équation $b^2(x^2+y^2)+a^2z^2\leq a^2b^2$. Après un passage en coordonnées cylindriques, on trouvera $\dfrac{2}{3}ba^2\left(\pi-\dfrac{4}{3}\right)$.

EXERCICE 6 Déterminer le moment d'inertie d'un tétraèdre régulier par rapport à un axe passant par son centre d'inertie et un sommet.

EXERCICE 7 Montrer le théorème de Huygens : si $\Delta_G$ est l'axe parallèle à $\Delta$ passant par le centre d'inertie d'un solide de masse $M$, on a : $I_\Delta = I_{\Delta_G}+Md^2$ où $d$ est la distance de $G$ à $\Delta$.

EXERCICE 8 A l'aide du théorème de Huygens (exercice précédent), retrouver l'expression du moment d'inertie d'un disque (resp. d'une barre homogène) par rapport à différents axes “raisonnables”.