Intégration - 1ère couche

EXERCICE 1 Soit $f \in \mathcal{C}_{PM}([a,b])$. Montrer :

$$\left(\int_a^b f\right)^2 \leq (b-a)^2 \int_a^b f^2.$$

EXERCICE 2 Pour les fonctions continues, quels sont les cas d'égalité dans l'inégalité de la moyenne ? Et pour les fonctions seulement continues par morceaux ?

EXERCICE 3 Soit $f \in \mathcal{C}_{PM}(\mathbb{R})$ T-périodique. Montrer que $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt$ ne dépend pas de $a \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 4 En encadrant les sommes par des intégrales, donner un équivalent simple lorsque $n \to \infty$ de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \ln k$.

EXERCICE 5 (*)

Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad (y-x) f\big(\frac{x+y}{2}\big) = \int_x^y f.$$

EXERCICE 6 (*)

Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_{n,p} = \Big(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \big(1+\frac{k}{n}\big)^{1/p}\Big)^p.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{p\to\infty} \big(\lim\limits_{n\to\infty} u_{n,p}\big)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\lim\limits_{p\to\infty} u_{n,p}\big)$.

Remarque : ne surtout pas généraliser le résultat précédent !

EXERCICE 7 Soit $f \in \mathcal{C}_{PM}(I)$ et $a \in I$. Que dire de l'application

$$F \left\| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array} \right.$$

EXERCICE 8 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ en lesquels $\displaystyle\int_{x^2/6}^{3x^3} \sqrt{1-t^8}dt$ est définie. On note $f(x)$ ce réel pour de tels x. Etudier la continuité et la dérivabilité de f.

EXERCICE 9 (*) "Lemme de Riemann-Lebesgue"

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Montrer : $\displaystyle\int_a^b f(x)\cos nx dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

On pourra commencer par le cas où f est constante, puis f en escalier, puis terminer avec un lemme d'approximation vu en cours. N.B. : dans le cas où f est $\mathcal{C}^1$, une simple IPP suffit : le vérifier !

EXERCICE 10 (**)

Déterminer la limite, lorsque u tend vers 0^+, de $f(u) = \int_u^{2u} \frac{\cos x}{x} dx$.

On pourra commencer par fixer u et majorer (soigneusement) $|\cos x - 1|$ lorsque $u \leq x \leq 2u$, puis obtenir une majoration de $\left| f(u) - \int_u^{2u} \frac{dx}{x} \right|$ en fonction de u.

EXERCICE 11 (**)

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $\int_x^y \mathrm{e}^{t^2} = 1$. Dans toute la suite, on note $y = \varphi(x)$ le réel ainsi associé à x.
2. Montrer que φ est croissante ; déterminer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
3. (difficile) Montrer que φ est continue puis dérivable.
4. Montrer que la graphe de φ admet un axe de symétrie et une asymptote en $+\infty$ et $-\infty$.
5. Esquisser le graphe de φ.

EXERCICE 12 Calculer les intégrales suivantes :

1. Quelques fractions rationnelles...
   (a) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+5)}$;
   (b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-4}$;
   (c) $\int_0^1 \frac{2x+3}{2x+1} dx$;
   (d) $\int_0^1 \frac{x^2-5x+5}{x^2+4} dx$;
   (e) $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$;
   (f) $\int_0^t \frac{x}{(x+1)^2} dx$;
2. $\int_0^1 x^2(2x+1)^{10} dx$;
3. $\int_{-1}^1 x^{19}(x^2+1)^{18} dx$;
4. $\int_a^b \frac{\operatorname{sh} t}{1+\operatorname{ch} t} dt$ où a et b sont deux réels ;
5. $\int_0^1 x(\arctan x)^2 dx$ (intégrer deux fois par parties) ;
6. $\int_{\pi/2}^{\alpha} \frac{\cos^2(2x)}{\sin x}$ où $0 < \alpha < \pi$ ($t = \cos x$) ;
7. $\int_0^1 \frac{1+\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh}^2 x} dx$ ($t = \mathrm{e}^x$ après simplification) ;
8. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 t dt$;
9. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 t dt$;
10. $\int_{-1}^1 \sqrt{1+|x(1-x)|} dx$;
11. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^3 x} dx$ (poser $y = \sin x$).