Intégration des fonctions continues sur un segment

Table des matières

1 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

1.1 Fonctions en escalier - continues par morceaux

Définition 1

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite :

- *en escalier* lorsqu'il existe une subdivision de l'intervalle $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n = b$ telle que sur chaque intervalle ouvert $]\sigma_k, \sigma_{k+1}[$, f est constante.
- *continue par morceaux* lorsqu'il existe une subdivision de l'intervalle $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n = b$ telle que sur chaque intervalle ouvert $]\sigma_k, \sigma_{k+1}[$, f est continue, et admet une limite finie en σ_k^+ et σ_{k+1}^-.

L'ensemble des fonctions en escalier (resp. continues par morceaux) sur $[a, b]$ est noté $Esc([a, b])$ (resp. $\mathcal{C}_{PM}([a, b])$).

Remarques 1

- Dans un cas comme dans l'autre, on n'impose aucune valeur en les σ_i, mais la fonction est bien définie en ces points.
- Avec les notations de la définition, f est continue par morceaux lorsque pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f|_{]\sigma_k,\sigma_{k+1}[}$ se prolonge en une fonction continue sur $[\sigma_k, \sigma_{k+1}]$.
- Une fonction en escalier est bien entendu continue par morceaux.
- Attention, la fonction $x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux, pas plus que $x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{E(1/x)} & \text{sinon} \end{cases}$ (exo : tracer le graphe de cette dernière fonction).

Proposition 1 *(théorème d'approximation)*

Si $f \in \mathcal{C}_{PM}([a, b])$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe $g \in Esc([a, b])$ telle que $g - \varepsilon \le f \le g + \varepsilon$.

Preuve : Ce résultat est admis. Citons tout de même une preuve très élégante, qui consiste à considérer l'ensemble X des $x \in [a, b]$ tels qu'il existe une ε-approximation de f sur $[a, x]$. Cet ensemble est non vide (il contient a !), et si on note S sa borne supérieure, on montre d'abord que $S \in X$ (sinon, on recolle une ε-approximation de f sur $[a, S - \alpha]$ et une sur $]S - \alpha, S]$...) puis que $S = b$ (sinon, on utilise la continuité de f en S pour obtenir une ε-approximation sur $[S, S + \alpha]$...). ■

1.2 Définition de $\displaystyle\int_a^b f$ - propriétés de base

Le théorème d'approximation précédent nous dit que toute fonction continue par morceaux peut être approchée de façon satisfaisante par une fonction en escalier. On va donc commencer par définir l'intégrale de ces dernières, de la façon la plus naturelle qui soit (en pensant à l'aire sous la courbe...)

Définition 2

- Soit $f \in Esc([a, b])$, constante égale à y_i sur chaque intervalle $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$. On définit alors l'intégrale de f sur $[a, b]$, notée $\displaystyle\int_a^b f$, ou $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ par : $\displaystyle\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} (\sigma_{k+1} - \sigma_k) y_k$.
- Soit $f \in \mathcal{C}_{PM}([a, b])$ à valeurs positives. On définit $\displaystyle\int_a^b f$ comme la borne supérieure de toutes les intégrales $\displaystyle\int_a^b g$, pour g en escalier et inférieure à f.
- Soit $f \in \mathcal{C}_{PM}([a, b])$. Si on note $f^+ = \text{Max}(f, 0)$ et $f^- = -\text{Min}(f, 0)$, alors f^+ et f^- sont continues par morceaux, à valeurs positives, et $f = f^+ - f^-$. On définit alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^-$.

On admettra les résultats de la proposition suivante.

PROPOSITION 2

- *Si* $f, g \in \mathcal{C}_{PM}([a,b])$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors* $\lambda f + g \in \mathcal{C}_{PM}([a,b])$, *et* $\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$.
- *Si* $a < b < c$ *et* $f \in \mathcal{C}_{PM}([a,c])$ *alors les restrictions de* f *à* $[a,b]$ *et* $[b,c]$ *sont continues par morceaux, et* $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

1.3 Cas des fonctions positives

En regardant les définitions, on obtient immédiatement le :

FAIT 1 *Si* $f \in \mathcal{C}_{PM}([a,b])$ *est à valeurs positives, alors* $\int_a^b f \geq 0$

Bien entendu, on en déduit le :

COROLLAIRE 1 *Si* $g, h \in \mathcal{C}_{PM}([a,b])$ *et* $g \leq h$, *alors* $\int_a^b g \leq \int_a^b h$.

Le résultat suivant précise cela lorsque f est continue :

PROPOSITION 3 *Si* f *est continue sur le segment* $[a,b]$, *à valeurs positives* (≥ 0) *et est non nulle, alors* $\int_a^b f > 0$.

Ce résultat sera souvent utilisé sous la forme “si f est continue, à valeurs positives, et d’intégrale nulle, alors f est nulle”.

PREUVE : FAIRE UN DESSIN ! Il existe x_0 tel que $f(x_0) > 0$. La continuité de f nous assure qu’il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f \geq \frac{f(x_0)}{2}$ sur $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$[1]. On a alors $f \geq g$, avec g la fonction en escalier qui vaut $\frac{f(x_0)}{2}$ sur $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, et 0 ailleurs. On a alors $\int_a^b f \geq \int_a^b g = \varepsilon f(x_0) > 0$. ■

REMARQUE 2 La fonction $f \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est non nulle, à valeurs positives, et pourtant son intégrale sur $[0,1]$ est nulle...

EXERCICE 1 *Soit* $f \in \mathcal{C}_{PM}([a,b])$. *Montrer que* $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$, *avec égalité si et seulement si* f *est de signe constant.*

REMARQUE 3 Bientôt, on parlera de $\int_a^b f$ même lorsque $b < a$. Pour appliquer les résultats précédents, il faudra donc vérifier que $a < b$...

[1] Les brachycérophiles qui signalent qu’il peut y avoir problème si x_0 vaut a ou b sont renvoyés à leur occupation favorite...

1.4 Cauchy-Schwarz, Minkowsky

L'application $\varphi : (f,g) \mapsto \int_a^b fg$, définie sur $\mathcal{C}_{PM}([a,b])^2$, est une forme (i.e. à valeurs dans $\mathbb{R}$) bilinéaire (i.e. : linéaire en chacune de ses variables, l'autre étant fixée), symétrique (i.e. : $\varphi(g,f) = \varphi(f,g)$ et "positive" (i.e. : $\varphi(f,f)$ est toujours ≥ 0). De plus, sa restriction à $\mathcal{C}([a,b])^2$ est "définie positive" (i.e. : $\varphi(f,f) = 0$ implique $f = 0$). Dans ce cadre, on peut montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la preuve étant la même que lorsqu'on a montré l'inégalité $|\sum a_k b_k| \leq \left(\sum a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum b_k^2\right)^{1/2}$.

Proposition 4 *Soient $f, g \in \mathcal{C}_{PM}([a,b])$. On a alors :*

$$\Big|\int_a^b fg\Big| \leq \Big(\int_a^b f^2\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b g^2\Big)^{1/2}.$$

Si de plus f et g sont continues, alors : il y a égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles[2].

Preuve :

- Définissons $\psi : \lambda \mapsto \varphi(\lambda f + g, \lambda f + g) = \int_a^b (\lambda f + g)^2$. Par linéarité, on trouve $\psi(\lambda) = A\lambda^2 + 2B\lambda + C$, avec A, B et C qui valent... Si $A = 0$, on vérifie de façon indépendante l'inégalité. Sinon, ψ est une application polynômiale de degré 2 à valeurs toujours ≥ 0. On sait alors (après avoir étudié un million de trinômes au lycée) que le discriminant est ≤ 0, ce qui donne exactement l'inégalité recherchée.
- Supposons maintenant f et g continues. Si f et g sont proportionnelles, on vérifie sans le moindre mal qu'il y a égalité. Réciproquement, une éventuelle égalité implique $\Delta = 0$ dans le calcul précédent, d'où l'existence de $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(\lambda_0) = 0$, et on conclut sans mal...

■

Exercice 2 *Soit $f \in \mathcal{C}_{PM}([0,1])$. Montrer :* $\int_0^1 f^2 \leq \Big(\int_0^1 f\Big)^2$.

Remarque 4 On pourra également traiter l'exercice précédent à l'aide de l'inégalité de Jensen, vue dans le chapitre sur les fonctions convexes.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permettra au lecteur d'établir l'inégalité de Minkowsky qui suit, et qui est en fait une inégalité triangulaire...

Proposition 5 *Si $f, g \in \mathcal{C}_{PM}([a,b])$, alors*

$$\Big(\int_a^b (f+g)^2\Big)^{1/2} \leq \Big(\int_a^b f^2\Big)^{1/2} + \Big(\int_a^b g^2\Big)^{1/2}.$$

Si de plus f et g sont continues, alors : il y a égalité si et seulement si f et g sont "$\mathbb{R}^+$-proportionnelles".

1.5 Sommes de Riemann

En pensant à la définition de l'intégrale "intuitée comme une aire", il semble raisonnable[3] d'approcher $\int_a^b f$ par $R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big)$ (il s'agit d'une "somme de Riemann"). Le théorème qui suit justifie cela :

Proposition 6 *Si $f \in \mathcal{C}_{PM}([a,b])$, alors :* $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.

[2] Hum... sauriez-vous préciser cette notion avant de lire la suite ?
[3] Evidemment, sans dessin, c'est très mystérieux...

Preuve : Pour la suite de ce paragraphe et le suivant, on note $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}\cdot$

On va traiter le cas où f est continue (ce qui ne nuit vraiment pas à la généralité, mais évite bien des soucis de découpages sordides).

- Si f est "seulement" continue (preuve HP) : on fixe $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\rho > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in [a, b], \qquad |x - y| \leq \rho \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot$$

  Cette propriété s'appelle l'"uniforme continuité" et se montre par l'absurde (sinon, il existerait deux suites (x_n) et (y_n) telles que gnagnagna ; (x_n) étant bornée, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge. On obtient alors une contradiction gnagnagna...).
  Si n est tel que $\dfrac{b-a}{n} \leq \rho$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, et $t \in [a_k, a_{k+1}]$, on a $|f(t) - f(a_k)| \leq \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, puis en intégrant : $\left|\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f - \frac{b-a}{n} f(a_k)\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{n}$, et en sommant avec l'inégalié triangulaire : $\left|\displaystyle\int_a^b f - R_n(f)\right| \leq \varepsilon$.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ (preuve au programme), alors f est K-lipschitzienne, avec K la maximum de la fonction continue $|f'|$ sur le segment $[a, b]$. Si $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a alors :

$$\forall t \in [a_k, a_{k+1}], \qquad |f(t) - f(a_k)| \leq K\,|t - a_k| \leq K\frac{b-a}{n},$$

  ce qui donne après intégration puis sommation : $\left|\displaystyle\int_a^b f - R_n(f)\right| \leq K\dfrac{(b-a)^2}{n}\cdot$

■

Remarque 5 On peut être amené à adapter le théorème précédent lorsque des termes de la somme manquent, ou sont ajoutés, ou bien lorsqu'on prend l'image d'un point à l'intérieur de $[a_k, a_{k+1}]$ plutôt que l'un des bords. Par exemple, on a $u_n = \displaystyle\sum_{k=-3}^{n-2} \ln\Big(2 + \frac{3k}{n}\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \ln(2+3t)dt$, mais aussi $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_2^5 \ln x dx$ selon le choix de l'intervalle et de la fonction qu'on aura effectué.

Exercice 3 *Etudier le comportement lorsque n tend vers $+\infty$ de* $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=2}^{n+3} \sin\frac{k\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{3n+2}\cdot$

Solution : Déja, u_n ressemble à $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{3n+2}$ et même à $w_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{3n}$. Plus précisément, $|v_n - u_n| \leq \dfrac{6}{n}$, et

$$|w_n - v_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|\sin\frac{k\pi}{n}\right| \left|\sin\frac{k\pi}{3n+2} - \sin\frac{k\pi}{3n}\right|$$

On a ensuite $\left|\sin\dfrac{k\pi}{n}\right| \leq 1$, et du fait du caractère 1-lipschitzien[4] de la fonction sinus :

$$\left|\sin\frac{k\pi}{3n+2} - \sin\frac{k\pi}{3n}\right| \leq \left|\frac{k\pi}{3n+2} - \frac{k\pi}{3n}\right| \leq \frac{2\pi}{9n^2},$$

et donc $w_n - v_n = O(1/n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Enfin, $w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin t \sin\frac{t}{3}dt = \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3} \sin 3x \sin x dx$. Une petite linéarisation nous permet de calculer cette intégrale pour trouver comme Maple :

[4] qui vient d'où, au fait ?

```
>int(sin(3*x)*sin(x),x=0..Pi/3);
                              3/16 sqrt(3)
```

Il reste à conclure proprement :

$$u_n = (u_n - v_n) + (v_n - w_n) + w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{9\sqrt{3}}{16\pi}.$$

Petite expérimentation Maple :

```
> s:=n->add(evalf(sin(k*Pi/n)*sin(k*Pi/(3*n+2))),k=2..n+3)/n:
> evalf(9/16/Pi*3^(1/2));
                              .3101225037
> s(10),s(100),s(1000),s(10000);
           .1291228288, .3066918040, .3099293341, .3101046716
```

La convergence est assez lente ; “en $\frac{1}{n}$”, plus précisément. Pas très étonnant si on y réfléchit bien...

1.6 Méthode des trapèzes

Exercice 4 *On suppose f affine sur $[a,b]$. Exprimer $\int_a^b f$ à l'aide de $f(a)$ et $f(b)$.* Tout calcul est prohibé : on fera un dessin, et un couper/coller virtuel !

Exercice 5 *Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$. On définit g la fonction continue sur $[a,b]$ et affine sur chaque segment $[a_k, a_{k+1}]$ et interpolant f en les a_k. Exprimer $\int_a^b g$ à l'aide des $f(a_k)$.*

Exercice 6 *Soit δ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\alpha,\beta]$ telle que $\delta(\alpha) = \delta(\beta) = 0$. En utilisant Rolle puis l'IAF, montrer : $\left|\int_a^b \delta\right| \leq \|\delta''\|_\infty(\beta-\alpha)^3$.*

Après ces trois exercices, le résultat suivant doit pouvoir être montré sans trop de problème :

Proposition 7 *Si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, alors*

$$\int_a^b f - \frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(a_k) + f(a_{k+1})\big) = O(1/n^2).$$

Exercice 7 *Justifier le titre de ce paragraphe.*

Remarque 6 Le théorème de Riemann dit qu'en interpolant f par des fonctions constantes sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$, il y a convergence en $O(1/n)$ si f est continue.

Le résultat précédent dit que si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors en interpolant f par des fonctions affines sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$, il y a convergence en $O(1/n^2)$.

Dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^4$, on peut regarder ce qui se passe si on interpole f par des polynômes de degré ≤ 2 (interpolation en a_i, $\frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ et a_{i+1}). Il y a alors convergence en $O(1/n^4)$, ce qui est significativement meilleur. Il s'agit de la méthode de Simpson, utilisée en calcul numérique (par exemple par votre calculatrice. . .)

1.7 Inégalité de la moyenne

Si $f \in \mathcal{C}_{PM}([a,b])$, la moyenne de f est $moy(f) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$. On vérifie sans mal qu'une fonction continue par morceaux sur un segment possède un maximum et un minimum. Une simple intégration d'inégalité nous fournit alors l'inégalité de la moyenne, qui est en fait un encadrement :

PROPOSITION 8 *Si $f \in \mathcal{C}_{PM}([a,b])$, alors :* $\displaystyle\operatorname*{Min}_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq \operatorname*{Max}_{[a,b]} f.$

REMARQUE 7 Si f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires nous fournit même l'existence de $c \in [a,b]$ tel que $moy(f) = f(c)$, c'est ce qui s'appelle la "formule de la moyenne", qui est hors programme (retenez plutôt la démarche dans ce paragraphe, et si vous avez besoin de cette "égalité de la moyenne", vous saurez la retrouver).

2 Lien entre la dérivation et l'intégration

2.1 Deux extensions

- Si f est continue sur un intervalle I et $b < a$, on définit $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$. Une telle définition assure la validité de la relation de Chasles $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$ quelques soient les positions respectives de a, b et c.
- Soit f une application de I dans $\mathbb{C}$. On peut décomposer f en $f = f_1 + if_2$, avec f_1 et f_2 deux applications de I dans $\mathbb{R}$. On dit alors que f est continue par morceaux (resp. continue) lorsque f_1 et f_2 le sont. Le cas échéant, on définit lorsque $a, b \in I$: $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b f_1 + i\int_a^b f_2$. Toutes les propriétés (ne faisant pas intervenir le signe !) de l'intégrale réelle sont alors maintenues : linéarité, Chasles, théorème sur les sommes de Riemann, et même : $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$, avec égalité si et seulement si f a un argument constant.

EXERCICE 8 *Montrer les résultats précédents ! Pour la dernière inégalité, on pourra noter θ_0 un argument de $\displaystyle\int_a^b f$ et considérer $g = e^{-i\theta_0} f$, ce qui permet de se ramener au cas réel...*

2.2 La notion de primitive

DÉFINITION 3
Soient I un intervalle et $f \in \mathcal{C}(I)$. On appelle *primitive* de f toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable, de dérivée $F' = f$ (et donc F est de classe $\mathcal{C}^1$).

L'existence d'une primitive pour f donnée ne va pas de soi. La question de l'unicité est rêglée par le résultat suivant :

PROPOSITION 9 *Si F est UNE primitive de f, alors LES primitives de f sont les applications de la forme $x \mapsto F(x) + K$, avec $K \in \mathbb{R}$.*

2.3 Le théorème fondamental du calcul différentiel/intégral

Comme il n'échappera à personne, dans "théorème fondamental", il y a "fondamental"... Il sera donc "apprécié" que vous sachiez l'énoncer précisément, même si les hypothèses sont extraordinairement élaborées, et complexes à retenir.

THÉORÈME 1 *Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et $x_0 \in I$. Alors l'application $F_{x_0} : x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f$ est dérivable, de dérivée f.*

Ainsi, toute fonction continue admet bien une primitive...

PREUVE : Fixons $a \in I$. On s'intéresse au rapport $r(h) = \dfrac{F_{x_0}(a+h) - F_{x_0}(a)}{h} = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_a^{a+h} f$ lorsque $h \to 0$. On se limite ici au cas $h > 0$: on a l'encadrement $\underset{[a,a+h]}{\mathrm{Min}}\, f \leq r(h) \leq \underset{[a,a+h]}{\mathrm{Max}}\, f$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure qu'il existe $x(h) \in [a, a+h]$ tel que $r(h) = f\big(x(h)\big)$. Le comportement lorsque $h \to 0^+$ s'en déduit par simple composition de limites... ■

COROLLAIRE 2 *Si F est une primitive de f, alors $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$. De même, si $f \in \mathcal{C}^1(I)$, alors $\displaystyle\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.*

EXERCICE 9 *Soient f continue sur I, et $a, b \in \mathcal{C}^1(J)$ à valeurs dans I. Montrer que $G : x \mapsto \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$ est dérivable, et calculer sa dérivée.*

REMARQUE 8 Toute primitive de f n'est pas forcément de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f$. Par exemple, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ admet pour primitive $x \mapsto \arctan x = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ ainsi que $x \mapsto \arctan x + 1 = \displaystyle\int_{-\pi/4}^{x} \frac{dt}{1+t^2}$, mais aussi $x \mapsto \arctan x + 50$, qui n'est pas de la forme $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{1+t^2}$.

2.4 Primitives classiques

On méditera longtemps l'affirmation Orwelienne :

Savoir primitiver, c'est savoir dériver. Savoir dériver, c'est savoir primitiver.

Chercher une primitive de f, c'est chercher un machin qui se dérive en f... on cherche donc dans son (vaste) sac à fonctions quelque chose qui se dérive A PEU PRES en f ; on ajuste ENSUITE éventuellement avec une constante multiplicative pour trouver exactement f. Ce principe s'applique aux fonctions trigonométriques, mais aussi à $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$, ainsi que $x \mapsto \dfrac{1}{x} \cdots$

Il est d'usage de noter $\displaystyle\int f(x)dx$ toute primitive de f. Cette notation est justifiée par le fait que toutes les primitives de f sont de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f + K = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + K$ (noter la variable d'intégration qui ne peut EN AUCUN CAS coïncider avec l'un des deux bords du domaine d'intégration...). Bien entendu, il n'y a pas unicité de la primitive, donc on peut avoir $\displaystyle\int f(x)dx = g(x)$ et $\displaystyle\int f(x)dx = h(x)$ sans avoir $g(x) = h(x)$; méfiance donc. Tout va mieux si on lit "UNE primitive de f est ..." ou bien "LES primitive de f sont les applications ...". Par contre, une formulation du genre "LA primitive de f est ..." prouve clairement qu'on a pas compris le sens de la notation...

Pour certaines fonctions, il est crucial de signaler l'intervalle sur lequel on travaille ($x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$).

Voici donc un premier tableau de primitives, qui sera complété dans le chapitre suivant :

$f(x)$	I	$\int f(x)dx$
$x^\alpha, \quad \alpha > 0$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \neq -1$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\ln x$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_-^*$	$\ln(-x)$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x$
$\tan x$	$]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi[$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan x$

Ecrire "$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$ sur $\mathbb{R}^*$" n'a pas de sens : la notion de primitive n'a été définie que pour une fonction continue sur un *intervalle*. Pour retrouver une primitive de la fonction tan, noter que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = -\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}\cdots$

2.5 Intégration par parties

La relation $(uv)' = u'v + uv'$ va permettre d'obtenir après intégration entre a et b la formule d'intégration par parties.

PROPOSITION 10 *Si u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $a, b \in I$, alors :*

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

PREUVE : Ben... voir la ligne qui précède l'énoncé ! ■

EXEMPLE 1 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\frac{2x}{(1+x^2)^2}dx$. *On POSE $u(x) = x$; on aura alors $u'(x) = 1$. Pour avoir $v'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, il SUFFIT de prendre $v(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}\cdot$ On a ainsi :*

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{-x}{1+x^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\cdot$$

Toute personne changeant le mot "suffit" en un autre que je n'ose prononcer se ferait massacrer... D'ailleurs, on verra des situations où le choix d'une constante d'intégration intelligente sera crucial. De même, les mots "avoir" et "prendre" ont des sens différents...

EXERCICE 10 *Donner une primitive simple de la fonction* ln *sur $\mathbb{R}_*^+$.*

2.6 Changement de variable

Proposition 11 *Soient $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$ à valeurs dans J, $f \in \mathcal{C}(J)$, et $a, b \in I$. Alors :*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$$

Preuve : On libère b au sens suivant : on note $F_1(b)$ et $F_2(b)$ les membres de gauche et de droite dans la relation précédente : F_1 et F_2 sont deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Elles coïncident en a, sont dérivables de même dérivée (faire intevenir une primitive F de f...) $F_1' = F_2' = \varphi'.f \circ \varphi$. Tout ceci se passant sur un intervalle, F_1 et F_2 sont donc égales. ■

Remarques 9

- Cette formule mystérieuse s'applique sans problème en remplaçant formellement x par $\varphi(t)$, et dx par $\varphi'(t)dt$ dans l'intégrale initiale (en prenant garde aux bornes). Puisque $x = \varphi(t)$, "il est bien évident que $\dfrac{dx}{dt} = \varphi'(t)$, donc $dx = \varphi'(t)dt$" ; héhé !
- Si φ est un "difféomorphisme", c'est-à-dire une bijection dérivable de réciproque dérivable et si on note $\psi = \varphi^{-1}$, alors ψ' ne s'annule pas, et la formule précédente devient, en notant $A = \varphi(a)$ et $B = \varphi(b)$:

$$\int_A^B f(x)dx = \int_{\psi(A)}^{\psi(B)} f\big(\psi^{-1}(t)\big)\frac{dt}{\psi'\big(\psi^{-1}(t)\big)}.$$

- **EN PRATIQUE :** face à une intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx$, on applique la formule de changement de variable de deux façons :
  - En "posant $x = \varphi(t)$", ce qui revient à chercher un intervalle $[a, b]$ tel que $\varphi(a) = \alpha$ et $\varphi(b) = \beta$, et on peut alors appliquer formellement le changement de variable.
  - En "posant $t = \psi(x)$", ce qui donne en travaillant formellement : $dt = \psi'(x)dx$, donc $dx = \dfrac{dt}{\psi'(x)} = \dfrac{dt}{\psi' \circ \psi^{-1}(t)}$: on a besoin ici d'exprimer x en fonction de t, donc d'avoir ψ bijective, et même ψ difféomorphisme. La validité de ce travail formel est alors justifiée par la remarque précédente.

Exemple 2 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2+t+1}$ *: on sait primitiver $\dfrac{1}{1+u^2}$, donc on s'y ramène en écrivant*

$$t^2+t+1 = (t+1/2)^2 + 3/4 = \frac{3}{4}\Big(\big(\frac{2}{\sqrt{3}}(t-1/2)\big)^2+1\Big),$$

et en posant $u = \dfrac{2}{\sqrt{3}}(t+1/2)$: en pratique on "pose" $t + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}u$ (ici, tout est bijectif...). On a $dt = \dfrac{\sqrt{3}}{2}du$. Lorsque t décrit $[0, 1]$, u décrit $[1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, et ainsi :

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2+t+1} = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}du}{\frac{3}{4}(u^2+1)} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan u\right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\Big) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Remarque 10 Notons que ce type de changement de variables a également des intérêts théoriques : par exemple, on montrera que si f est paire (resp. impaire), on a $\displaystyle\int_{-x}^0 f = \int_0^x f$ (resp. $\displaystyle\int_{-x}^0 f = -\int_0^x f$). Ces résultats sont clairs sur un dessin.

EXEMPLE 3 *Pour calculer* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin x}$, *on peut "sentir" le changement de variable* $t = \sin x$ *(les rêgles de Bioche" qu'on verra plus tard nous auraient fourni ce changement...). On a alors* $dt = \cos x dx$. *Lorsque* x *décrit* $[0, \pi/2]$, $t = \sin x$ *décrit* $[0, 1]$, *donc :*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin x} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2.$$

REMARQUE 11 On a posé $\sin x = t$ bien que sin ne soit pas un difféomorphisme sur $[0, \pi/2]$. La différentiation formelle $dt = \cos x dx$ ne permet pas d'exprimer dx en fonction de dt, mais fait apparaitre le terme $\varphi'(x)dx$, permettant ainsi de voir l'intégrale initiale sous la forme $\displaystyle\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx$. Finalement, un tel changement de variable sera bien licite, s'il permet de changer l'intégrant initial $F(x)dx$ en un intégrant de la forme $f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx$. Ce changement de variable est alors accompagné d'un changement de fonction.

Dans l'exemple suivant, on va voir le changement de variable de secours lors du calcul d'une intégrale de la forme $\int F(\sin t, \cos t)dt$, avec F fraction rationnelle : le changement de variable $t = \tan \dfrac{x}{2}$ nécessite de connaitre ses formules trigo...

EXEMPLE 4 *Dans l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$, *le changement de variable* $u = \sin x$ *conduit à quelques soucis. On exécute le changement de variable* $t = \tan \dfrac{x}{2}$: $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2}(1+t^2)$, $\sin t = \dfrac{2t}{1+t^2}$, *et lorsque* x *décrit* $[0, \pi/2]$, u *décrit* $[0, 1]$, *si bien que :*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x} = 2\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)\Big(1+\dfrac{2t}{1+t^2}\Big)} = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2+2t} = 2\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = 2\left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^1 = 1.$$

EXERCICE 11 *Avec le changement de variable* $t = \tan \dfrac{x}{2}$, *montrer que* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x} = 0$. *Montrer ensuite que ce résultat est grotesque. Expliquer !*

EXEMPLE 5 *Face à une intégrale de la forme* $\displaystyle\int F(e^x)dx$ *avec* F *fraction rationnelle, le changement de variable* $t = e^x$ *ramène systématiquement à l'intégrale d'une fraction, qu'on calcule en décomposant en éléments simples :*

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^{2x}+1} &= \int_1^2 \frac{dt}{t(t^2+1)} = \int_1^2 \Big(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\Big)dt \\ &= \left[\ln t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5.\end{aligned}$$

Pour terminer, on donne un exemple de calcul de primitive.

EXERCICE 12 *Déterminer les primitives sur* $I_1 =]-\infty, -1[$ *et* $]-1, +\infty[$ *de* $x \mapsto \dfrac{dx}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$.

SOLUTION : Travaillons sur I_2 : il suffit de trouver UNE primitive. le théorème fondamental du calcul différentiel/intégral nous dit qu'une primitive est $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(t+1)^2(t^2+t+1)}$. On décompose en éléments simples et on prépare le travail en vue de l'intégration :

$$\frac{1}{(t+1)^2(t^2+t+1)} = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{-t-1}{t^2+t+1} = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{2}\frac{2t+1}{t^2+t+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(t+1/2)^2+3/4}.$$

Pour intégrer le dernier terme, on exécutera le changement de variable $t+1/2=\frac{\sqrt{3}}{2}u$, pour obtenir :

$$F(x)=\ln(1+x)-\frac{1}{1+x}+1-\frac{1}{2}\ln(1+x+x^2)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\cdot$$

Sur I_1, UNE primitive sera l'application $G : x\mapsto\int_{-2}^{x}\frac{dt}{(t+1)^2(t^2+t+1)}\cdot$ Un calcul similaire au précédent donnerait :

$$G(x)=\ln|1+x|-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\ln(1+x+x^2)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+K'$$

avec K' une constante peu intéressante vu la nature du problème...

Remarque 12 En pratique, on pourra utiliser les “primitives formelles”, en remplaçant $\int_{x_0}^{x}f(t)dt$ par $\int f(x)dx$, ce qui évite de trainer des constantes dont on a que faire a posteriori. Cela évite par ailleurs de distinguer les intervalles sur lesquels on fait le calcul. Cela donnerait pour l'exercice précédent, sur chaque intervalle (mais pas la réunion !) :

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+x+1)} &= \int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}dx\\ &= \ln|1+x|-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\ln(1+x+x^2)-\frac{1}{2}\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}du}{3/4(u^2+1)}\\ &= \ln|1+x|-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\ln(1+x+x^2)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\cdot\end{aligned}$$

On aura noté que s'il y a eu un changement de variable en cours de calcul, il faut penser à revenir à la variable initiale en fin de calcul.

3 Formules de Taylor - le retour

3.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Proposition 12 *Soit $f\in\mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ ($n\in\mathbb{N}$). Alors :*

$$f(b)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt.$$

Preuve : Récurrence plus intégration par parties : déjà vu... ■

3.2 Autres “formules” de taylor

La formule de Taylor avec reste intégral donne la valeur EXACTE du reste, contrairement aux autres formules de Taylor. C'est donc la plus puissante, et on pourra déduire de la FTRI toutes les deux autres formules de Taylor : inégalité de Taylor-Lagrange, théorème de Taylor-Young. Dans la fin de ce paragraphe, on énonce ces théorèmes avec des hypothèses “optimales”, et on donne une indication d'une preuve avec ces hypothèses.

Théorème 2 (Taylor-Young)
Si $f : I\rightarrow\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I, et n fois dérivable en $x_0\in I$, alors :

$$f(x_0+u)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}u^k+o(u^n).$$

Preuve : Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, le changement de variable $t = x_0 + uh$ ramène l'intervalle d'intégration $[x_0, x_0 + u]$ à $[0, 1]$ dans la FTRI :

$$f(x_0 + u) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} u^k + \frac{u^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-h)^n f^{(n+1)}\big(x_0 + uh\big) dh.$$

$f^{(n+1)}$ est continue, donc bornée au voisinage de x_0, de sorte que l'intégrale est bornée lorsque u tend vers 0, et ainsi

$$f(x_0 + u) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} u^k + O(u^{n+1}),$$

d'où on tire le résultat voulu.

Avec les hypothèses minimales de l'énoncé, on peut faire une preuve par récurrence (le cas $n = 1$ nous ramène à la définition de la dérivabilité)... ■

Théorème 3 (Inégalité de Taylor-Lagrange)
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et de classe $\mathcal{D}^{n+1}$ sur $]a,b[$, avec $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq K$ pour tout $t \in]a,b[$, alors :

$$\left| f(b) - \left(f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right) \right| \leq K \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Preuve : Dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, il suffit de majorer la valeur absolue de l'intégrale dans la FTRI. Avec les hypothèses de l'énoncé, on peux faire une récurrence, le cas $n = 0$ correspondant à l'inégalité des acroissements finis, elle-même conséquence du théorème des acroissements finis, lui-même conséquence du théorème de Rolle... pour lequel on a une hypothèse de dérivabilité sur l'ouvert seulement ! ■

Remarque 13 Ceux qui oublient les valeurs absolues se faisaient étriller en terminale lorsqu'ils les oubliaient pour l'inégalité des accroissements finis. Même motif, ...

3.3 DLs : intégration vs dérivation

- **Un DL ne peut pas être dérivé :** on a déjà vu qu'une fonction peut très bien avoir un DL d'ordre élevé sans qu'elle soit ne serait-ce que $\mathcal{C}^1$; voir $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^{10} \sin \dfrac{1}{x^{20}} & \text{sinon} \end{cases}$
- **Un DL peut être intégré :** plus précisément, si $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$, alors $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$. L'idée de la preuve est que si $|\varphi(t)| \leq \varepsilon t^n$ sur $[0, x]$, alors $\left|\displaystyle\int_0^x \varphi\right| \leq \varepsilon x^{n+1}$...
  Pour calculer un DL de arctan en 0 à l'ordre 8, il suffit de partir d'un DL à l'ordre 7 de $\arctan'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + o(t^7)$, et on obtient : $\arctan t = t - \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^5}{5} - \dfrac{t^7}{7} + o(t^8)$. Même chose pour obtenir un DL de $\ln(1+x)$...
- **Un DL peut être dérivé :** SI ON SAIT que f' admet un DL à l'ordre $n-1$ (par exemple si f est $\mathcal{C}^n$...), alors on peut obtenir ce DL en dérivant formellement un DL de f. En effet, si $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$ et $f'(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + o(x^{n-1})$, alors en intégrant ce dernier DL (c'est licite !) on obtient $f(x) - f(0) = b_0 x + b_1 \dfrac{x^2}{2} + \cdots + b_{n-1} \dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$, donc par unicité du DL de f à l'ordre n, $a_k = \dfrac{b_{k-1}}{k}$, ou encore $b_i = (i+1) a_{i+1}$: c'est ce qu'on aurait obtenu en dérivant formellement le DL de f.
  Ce dernier résultat est rarement utile... et toujours dangereux, donc méfiance.[5]

[5] dès qu'il est utilisé, les yeux du kholleur se mettent à briller perfidement...