Intégrales impropres

Exercice 1 Discuter l'existence des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{1/t}-1}{t}dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{(1-t)^2}dt.$$

Exercice 2 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1-t^4}}dt$. On pourra poser $u=t^2$, puis $u=\sin x$. (Réponse : $\frac{1}{2}$)

Exercice 3 Justifier l'existence des intégrales suivantes, PUIS les calculer :
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$; (réponse : $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$)
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{tdt}{(t+1)(t^2+1)}$; (réponse : $\frac{\pi}{4}$)
- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\tan t}}$ (réponse : $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$).

Exercice 4 Justifier ce qui suit :

```
> int(2*t/(1+t^2)^2,t=0..infinity),int(2*t*ln(t)/(1+t^2)^2,t=0..infinity);
                                1, 0
```

Exercice 5 Justifier l'existence, puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}dt$.

On montrera que pour $t \geq -n$, on a $(1+t/n)^n \leq e^t$, puis :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \Big(1-\frac{t^2}{n}\Big)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \Big(1+\frac{t^2}{n}\Big)^{-n}dt,$$

et on terminera grâce à l'équivalent des intégrales de Wallis, après des changements de variable $t=\sqrt{n}\sin\theta$ et $t=\sqrt{n}\tan\theta$! (réponse : $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

Exercice 6 (*) *Important (pour l'année prochaine) :*

1. - On suppose g intégrable positive sur $[0,+\infty[$ et f négligeable devant g au voisinage de $+\infty$ (de sorte que g est intégrable au voisinage de $+\infty$). Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} f$ est négligeable devant $\displaystyle\int_x^{+\infty} g$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   - *Application :* si $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $f \sim g$ en $+\infty$, on sait que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, mais on montrera qu'en plus : $\displaystyle\int_x^{\infty} f \sim \int_x^{+\infty} g$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- *Exemple :* Déterminer un équivalent simple, lorsque $x \to +\infty$, de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{e}^t + \cos t}$.

2. - On suppose g non intégrable positive sur $[0, +\infty[$ et f négligeable devant g au voisinage de $+\infty$: montrer que $\displaystyle\int_0^x f$ est négligeable devant $\displaystyle\int_0^x g$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   - Enoncer et prouver un résultat similaire pour les équivalents.
   - Déterminer un équivalent simple :
     – de $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t + \sqrt{t} + 1515}$ lorsque $x \to +\infty$;
     – de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + 12}$ lorsque n tend vers $+\infty$. *On commencera par encadrer la somme par des intégrales, grâce à la méthode des rectangles.*

EXERCICE 7 (*) *Pas fondamental, mais archi classique*

Montrer : $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln \sin t \, dt = -\pi \ln 2$.

On pourra se ramener à $[0, \pi/2]$, *puis faire apparaître* $\ln \cos t$, *etc...*