Intégrales impropres

1 Généralités

f est CPM sur I, intervalle... ouvert ou semi-ouvert de $\mathbb{R}$. Enoncés dans le cas où $I = [a, b[$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Notation $\int_a^b$ ou $\int_I$.

1.1 Cas des fonctions ≥ 0

- Définition : borne supérieure finie (le cas échéant) des intégrales de f sur les segments inclus dans I.
- Propriété : si la fonction est intégrable, alors $\int_a^x f \underset{x \to b}{\longrightarrow} \int_I$.
- Rque : ICI, il y a équivalence entre l'existence d'une limite et l'intégrabilité.
- Exemples : $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ sur $\mathbb{R}^+$; $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ sur $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.

1.2 Propriétés

Linéarité, Chasles.

1.3 Extension aux fonctions de signe quelconque

- Définition : f intégrable ssi $|f|$ l'est.
- Proposition : f est intégrable ssi f^+ et f^- le sont). On définit alors $\int f = \int f^+ - \int f^-$.
- Proposition : si f est intégrable sur $[a, b[$, alors $\int_a^x f \underset{x \to b^-}{\longrightarrow} \int_a^b f$.
- Remarque : ici, il n'y a plus l'équivalence vue pour les fonctions positives (cas de $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ sur $[0, +\infty[$).
- Linéarité et Chasles : pas de problème.

2 Les exemples de base

2.1 Critère de domination

- Proposition : si g est intégrable et $|f| \leq g$ (ou $f = o(g)$, ou $f \sim g$) “au voisinage du point qui pose problème”, alors f est intégrable.
- Enoncé ”dual”.
- La plupart des preuves d'intégrabilité font appels à ces résultats, en utilisant un “exemple référence” qui suit. Tout problème d'intégrabilité pour φ en 1 se ramène à un problème en 0 en cherchant un équivalent de $\varphi(1-u)$ lorsque u tend vers 0...

2.2 t^α en 0

$t \mapsto t^\alpha$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha > -1$.

2.3 t^α en $+\infty$

$t \mapsto t^\alpha$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$.

2.4 Intégrales de Bertrand (exercice)

$t \mapsto t^\alpha \ln^\beta t$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $(\alpha < -1)$ OU $(\alpha = -1$ ET $\beta < -1)$.

3 Techniques de calcul

- Principe : passer à la limite des IPP ou changement de variable dans des intégrales sur des segments.
- Exemples : $\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} dt$, $\int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1-t^4}} dt = 1/2$ ($u = t^2$, $u = \sin x$...)
- Exercice : calcul de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt$, grâce à :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt,$$

puis à Wallis, via $t = \sqrt{n} \sin\theta$ et $t = \sqrt{n} \tan\theta$.