Equations différentielles

Exercice 1 *EDL d'ordre 1*
Résoudre les équations différentielles suivantes :
- $y' + 2y = t\cos t$;
- $y' + y = \mathrm{e}^t \cos t$;
- $y' + 2ty = t^2\mathrm{e}^t$;
- $y' - \mathrm{e}^t y = 2t\mathrm{e}^{\mathrm{e}^t}$, avec $y(0) = 1515$;
- (*) $t^3 y' = 2y$;
- (*) $3ty' - 4y = t$;
- (*) $t^2 y'(t) - (2t-1)y(t) = t^2$.

Exercice 2 *EDL d'ordre 1*
Résoudre les équations différentielles suivantes :
- $y'' + y = 4t^2\mathrm{e}^t$;
- $y'' + y = t\cos t$;
- $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-t}\cos t$;
- $y'' - 4y' + 3y = t\mathrm{e}^t + \cos t$;
- $y'' - 2y' + 5y = 2\mathrm{e}^t \cos^2 t$.

Exercice 3 *Deux changements de variable*
1. Résoudre sur $\mathbb{R}_*^+$: $t^2 y'' + ty' - 9y = 6t^3$.
   On pourra poser $t = e^u$", ce qui, BIEN ENTENDU, ne signifie pas qu'on va faire n'importe quoi, mais par exemple : on va considérer la fonction COMPOSEE $z : u \mapsto y(e^u)$.
2. En posant $z(t) = y(\sqrt{t})$, résoudre sur $\mathbb{R}_*^+$: $ty'' - y' - t^3 y = 0$.

Exercice 4 *Equations autonomes*
Elles sont de la forme $y' = f(y)$. Lorsque f ne s'annule pas, elles se ramènent grosso modo à $\dfrac{dy}{f(y)} = dt$ ("équation à variable séparée") et on intègre les deux membres modulo quelques précautions/justifications.
1. Déterminer les solutions maximales de $y' = \mathrm{e}^y$.
2. Même chose avec $y' = 1 + y^2$.
3. On s'intéresse maintenant à l'équation $y' = 1 + |y|^{3/2}$: on admet qu'il existe une solution f maximale définie sur un intervalle de la forme $]\alpha, \beta[$, et on se propose de montrer que $\beta < \infty$.
   - Montrer que f est un difféomorphisme croissant de $]\alpha, \beta[$ sur son image. On notera ψ le difféomorphisme réciproque.
     Dans la suite, on suppose que $\beta = +\infty$, et on va arriver à une contradiction.
   - Montrer que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *(en évitant un argument "évident" du type "ben c'est strictement croissant, donc forcément ça tend vers $+\infty$"...)*
   - En faisant un changement de variable adéquat dans $\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)du}{1 + |f(u)|^{3/2}}$ puis en faisant tendre t vers $+\infty$, arriver à une contradiction.

Exercice 5 *Une équation à variable séparable*
C'est lorsqu'on peut se ramener à une équation de la forme $f(y)dy = g(t)dt$: on intègre alors les deux membres séparément.
Résoudre : $y' = e^{t+y}$.

Exercice 6 *Un système linéaire*
En suivant la méthode vue en cours, résoudre :

$$\begin{cases} x'(t) = & 5x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = & -x(t) + 6y(t) \end{cases}$$

Exercice 7 (*) *Un grand classique taupinal*

Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $y'(t) + y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer : $y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On pourra voir y comme solution d'une équation différentielle.

Le résultat reste-t-il vrai si on suppose plutôt : $y'(t) - y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$?

Pour exploiter une information concernant les dérivées de y, la méthode précédente sera souvent efficace, généralement associée à une césarerie.

Exercice 8 (**) *Trois équations non linéaires*

Déterminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes :

1. ${y'}^2 = 4y$ *(commencer par résoudre sur un intervalle où y est > 0, puis voir comment recoller...)*;
2. $y' = y - \dfrac{t^2}{y}$ *(considérer $z = y^2$)*;
3. $y' = t + \dfrac{y}{t} + \dfrac{y^2}{t}$ *(montrer d'abord que $y_0 : t \mapsto t \tan t$ est solution particulière, puis "poser" $z = \dfrac{1}{y - y_0}$).*

Exercice 9 (**)

Soit y solution de $(y')^2 = yy''$. Montrer que si y est non nulle, alors y ne s'annulle pas. Déterminer ensuite les solutions maximales de cette équation.

On pourra supposer $y > 0$ sur $]\alpha, \beta[$ et résoudre explicitement l'équation (un peu d'imagination !) sur cet intervalle.