Dérivation des fonctions numériques d'une variable réelle

1 Aspects locaux

Exercice 1 Etudier la dérivabilité en 0 de $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 2
- Dériver $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}$.
- Recommencer, mais sans erreur cette fois.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f admet une dérivée symétrique en $a \in \mathbb{R}$ si le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ admet une limite lorsque h tend vers 0 (par parité, on peut se contenter d'une limite à droite).
- Montrer que si f est dérivable à droite et à gauche en a, alors f y admet une dérivée symétrique.
- Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 4 On considère $f_1, \dots, f_{1515} \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$. Montrer que le produit $f_1 f_2 \dots f_{1515}$ est dérivable, et calculer sa dérivée.

Exercice 5 Montrer que l'application $f : x \mapsto \begin{cases} x^{1516} \sin \dfrac{1}{x^{1789}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 1515 sans y être dérivable 1515 fois (plus précisément, on montrera que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais f' n'est pas continue en 0, et a fortiori non dérivable...).

Exercice 6 (*)
- Trouver $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à valeurs ≥ 0, avec $f(t) > 0$ si et seulement si $t \in]0,1[$.
- Existe-t-il $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ à valeurs ≥ 0, avec $f(t) > 0$ si et seulement si $t \in [0,1]$?

Exercice 7 Déterminer les dérivées n-ièmes de $x \mapsto \sin^5 x$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x \cos x$.

Exercice 8 Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1} \ln x) = \frac{(n-1)!}{x}.$$

2 Aspects globaux

EXERCICE 9 Soient $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$. On se donne $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(ax+b) = af(x) + b.$$

1. Vérifier :
$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = f'\Big(a^n x + \frac{a^n - 1}{a-1} b\Big)\cdot$$
2. En déduire f lorsque $a < 1$.
3. Traiter également le cas $a > 1$.

EXERCICE 10 *Règle de L'Hôpital* (anecdotique)

- Soient f, g continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)\big(g(b)-g(a)\big) = g'(c)\big(f(b)-f(a)\big)$ (on pourra considérer $x \mapsto f(x)\big(g(b)-g(a)\big) - g(x)\big(f(b)-f(a)\big)$).
- On suppose $f, g \in \mathcal{C}([a-1, a+1])$ dérivables sur $[a-1, a+1] \setminus \{a\}$, avec $f(a) = g(a) = 0$, et g' ne s'annullant pas au voisinage de a. Montrer que si $\dfrac{f'}{g'} \underset{a}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, alors $\dfrac{f}{g} \underset{a}{\longrightarrow} l$.
- En utilisant le résultat précédent, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ ainsi que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}\cdot$

EXERCICE 11 *Théorème de Darboux*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que f' "a la propriété des valeurs intermédiaires", c'est-à-dire : si $f'(a) < \alpha < f'(b)$ avec $a < b$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \alpha$.

1. Première démonstration : commencer par le cas où $\alpha = 0$, et montrer que f admet un minimum local sur $]a,b[$. Ramener ensuite le cas général à ce cas particulier.
2. Deuxième point de vue : on définit g_1 et g_2 sur $[a,b]$ par $g_1(a) = f'(a)$, $g_1(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pour $x \in]a,b]$, $g_2'(b) = f'(b)$, et $g_2(x) = \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$ pour $x \in [a,b[$. Montrer que g_1 et g_2 sont continues et ont une valeur commune dans leur image ; conclure.

BIEN ENTENDU, tout cela ne signifie pas que f' est continue...

EXERCICE 12 On suppose f dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer qu'existent n réels $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = n$.
2. (*) Montrer qu'existent n réels $0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n < 1$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1/f'(y_k) = n$. *On pourra tronçonner les y plutôt que les x...*

EXERCICE 13 "Théorème de Rolle généralisé"

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ telle que $f(0) = 0$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer qu'il existe $t > 0$ tel que $f'(t) = 0$.

Exercice 14 (*)

Soient P un polynôme admettant n racines réelles distinctes, et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $P' + \lambda P$ admet au moins n racines réelles distinctes.

On pourra utiliser l'exercice précédent.

Exercice 15 Soient $a < b < c$ trois réels, et $f \in \mathcal{D}([a,b], \mathbb{R}^+)$, telle que $f(a) = f(b) = 0$.

Montrer qu'il existe une tangente au graphe de f qui passe par le point $(c, 0)$.

Exercice 16 (****) *Ulm MP - sans indication - outils de Sup.*

Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Min}\big(f(x), f(y)\big) \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \mathrm{Max}\big(f(x), f(y)\big).$$

3 Taylorismes

Exercice 17 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, dérivable $n+1$ fois sur $]a,b[$.

- Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que l'application

$$g : t \mapsto f(b) - \left(f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x)\right) - M \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

  vérifie $g(b) = g(a)$.
- Appliquer le théorème de Rolle et conclure.

Exercice 18 On fixe (provisoirement) $n \in \mathbb{N}$. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^{|x|}.$$

En déduire que si on fixe cette fois $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mathrm{e}^x.$$

Exercice 19 Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de $h \mapsto \sin(\pi/3 + h)$.

Exercice 20 On dit que le graphe de f possède un point d'inflexion lorsqu'il "traverse une tangente".

- Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de t_0 avec $f''(t_0) = 0$ et $f'''(t_0) \neq 0$, alors f admet un point d'inflexion en $M\big(t_0, f(t_0)\big)$.
- Réciproque ?

Exercice 21

- Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0, alors f admet un DL à l'ordre n et f' à l'ordre $n-1$, et qu'on peut obtenir le premier en intégrant le second formellement.

- En déduire le DL à l'ordre n de $t \mapsto \ln(1+t)$
- Même chose avec le DL de arctan en 0 à l'ordre 10 et celui de la fonction arcsin à l'ordre 4.

EXERCICE 22 On s'intéresse ici à la fonction tangente au voisinage de 0 :

- Déterminer le DL de tan à l'ordre 6 en 0 (encore avec le rapport $\frac{\sin x}{\cos x}$)·
- On note $a_n = \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!}\cdot$ Montrer que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, et :

$$\forall n \geq 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} a_k a_{n-k}.$$

- En déduire le DL de tan à l'ordre 7 en 0.

EXERCICE 23 (*) *Classique taupinal*

$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ est bornée ainsi que f''. Montrer que f' l'est également, avec : $\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$ ($\|g\|_\infty$ désigne $\operatorname*{Sup}_{\mathbb{R}} |g|$).

On majorera $|f'(x)|$ à l'aide de $f(x+h)$, $f(x-h)$ et de valeurs de f''. Ensuite, on choisira h de façon à minimiser le majorant.

EXERCICE 24 Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ telle que $f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer :

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \operatorname*{Sup}_{I} \left|f''\right|.$$

4 Fonctions à valeurs complexes

EXERCICE 25 On suppose $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$. Que dire (continuité, dérivabilité) de $\overline{f}$ et $|f|$?

EXERCICE 26 Montrer l'inégalité des accroissements finis dans le cas d'une fonction $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C}) \cap \mathcal{D}(]a,b[, \mathbb{C})$. On pourra prendre θ un argument de $f(b) - f(a)$, "redresser" f en prenant $g = \mathrm{e}^{-i\theta} f$, et appliquer l'IAF réelle à $\operatorname{Re} g$.

EXERCICE 27 (*****) *Le théorème de relèvement*

f désigne ici une application de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) d'un intervalle I dans $\mathbb{C}^*$. On va montrer qu'il existe un relèvement de classe $\mathcal{C}^k$, c'est-à-dire deux applications $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telles que $f(t) = \rho(t)\mathrm{e}^{i\alpha(t)}$ pour tout $t \in I$.

Il ne s'agit pas à proprement parler d'un exercice de TD... il est plutôt ici à titre culturel : on commence par travailler localement au voisinage de tout point. Ensuite, le passage du local au global ne va pas de soi : une telle situation se retrouve quand on cherche à résoudre une équation différentielle sur tout un intervalle. D'ailleurs, on verra dans le chapitre sur les équations différentielles une preuve bien plus simple du théorème de relèvement, mais qui ne marche pas dans le cas $\mathcal{C}^0$.

On pourra utiliser l'exercice 25.

1. Montrer qu'on peut se ramener au cas où f est à valeurs dans le cercle unité.

   Dans toute la suite, f est supposé à valeurs dans le cercle unité.

2. On suppose ici : $f(t_0) \neq -1$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap I$, $f(t) = \mathrm{e}^{i\alpha_1(t)}$, où $\alpha_1(t) = 2 \arctan \dfrac{\operatorname{Im} f(t)}{1 + \operatorname{Re} f(t)}$.
3. De même, trouver un "relèvement local" dans le cas où $f(t_0) = -1$.
4. On suppose que α_1 et α_2 sont deux relèvements locaux au voisinage de t_0. Montrer qu'ils coïncident à une constante près (noter que la différence relève localement l'application constante égale à 1).
5. On suppose : $I = [-1, 1[$ (pour couvrir les deux cas : ouvert/fermé). On fixe α_0 un argument de $f(0)$, et on définit X l'ensemble des $t \in [-1, 0]$ tel qu'il existe un relèvement de f sur $[t, 0]$ qui vaut α_0 en 0.
   (a) Montrer que X est non vide. On note alors x_0 sa borne inférieure.
   (b) Montrer (par l'absurde) que $x_0 = -1$, puis : $-1 \in X$.
   (c) Faire de même à droite de 0.
   (d) En déduire l'existence d'un relèvemement global.
6. Discuter l'unicité du relèvement global.

5 Quizz - continuité et dérivabilité

Exercice 28 Discuter la validité des affirmations suivantes, en donnant des preuves ou contre-exemples (I désigne toujours un intervalle) :

1. Si f est périodique et monotone, alors f est constante.
2. Si $f(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que f est décroissante sur $]-\infty, M]$.
3. Un produit de fonctions monotones et négatives est monotone.
4. Si f et g sont discontinues en x_0, alors $f + g$ également.
5. Si f est monotone sur $[0, 1]$, alors f est bornée.
6. Si $f(-1/n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(0)$ et $f(1/n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(0)$, alors f est continue en 0.
7. Si $f \in \mathcal{C}(I)$, avec I fermé, alors $f(I)$ est fermé.
8. Si $f \in \mathcal{C}(I)$, avec I ouvert, alors $f(I)$ est ouvert.
9. Si $f \in \mathcal{C}(I)$, avec I borné, alors f est bornée.
10. $\sqrt{x + \sqrt{x}} \underset{+\infty}{=} o(\sqrt{2x})$.
11. Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, alors e^f n'est pas équivalente à e^g en $+\infty$.
12. Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ vérifie $f(0) = 0$ et $f(t) > t$ pour tout $t > 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que f est croissante sur $[0, \alpha]$.
13. Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ vérifie $f(0) = 0$ et $f(t) > t$ pour tout $t > 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que f est croissante sur $[0, \alpha]$.
14. Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et non majorée tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
15. Si $f, g \in \mathcal{D}(I)$, alors $\operatorname{Sup}(f, g) \in \mathcal{D}(I)$.
16. Si $f \in \mathcal{D}(]0, 1[)$ et $f'(1/2) = 0$, alors f admet un extremum local en $\dfrac{1}{2}$, mais il ne s'agit pas nécessairement d'un maximum ou minimum global.
17. Il existe des fonctions admettant un minimum mais pas de maximum.

18. Si $f \in \mathcal{D}([a,b])$, alors $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = f'(a)$.

19. Si $f \in \mathcal{D}([a,b])$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$ existe, alors $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = f'(a)$.

20. Si $f \in \mathcal{D}([a,b])$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$ existe et est réelle, alors $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = f'(a)$.

21. Au voisinage de $\dfrac{\pi}{6}$, on a :
$$\sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \pi/6) + \frac{1}{4}(x - \pi/6)^2 + o\big((x - \pi/6)^2\big).$$

22. Toute fonction dérivable est continue ; la réciproque est fausse, mais il existe des fonctions qui sont continues et dérivables.