Continuité des fonctions numériques d'une variable réelle

1 Généralités

EXERCICE 1

- $f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\big(\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\big) = \sqrt{2}\cos\big(x - \pi/4\big)$, de sorte que f admet un maximum (local strict et global large) en chaque $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, et un minimum (local strict et global large) en chaque $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
- La fonction tan n'admet d'extremum (local ou global) en aucun point, puisqu'elle est strictement croissante au voisinage de tout point où elle est définie.
- $g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais aussi dérivable (en 0, c'est un peu délicat pour le moment...). La parité de g nous ramène à l'étude sur $\mathbb{R}^+$.
  Pour $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $\sin x - x\cos x$, donc de $\cos x(\tan x - x)$ pour $x \neq k\pi$. Une étude classique de $x \mapsto \tan x - x$ montre que cette fonction change de signe strict en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (comme le cosinus), mais aussi en des réels $x_k \in]k\pi, k\pi + \pi/2[$, de sorte que g admet un maximum local strict en $x_2, x_4, \ldots$, et un minimum local strict en $x_1, x_3, \ldots$.
  Enfin, g admet un maximum global strict en 0. Pourquoi ?
- (*) $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}\cos x$ est paire, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $h'(x)$ du signe de $\varphi(x) = -2x\cos x - \sin x = -\cos x(2x + \tan x)$ (pour $x \neq k\pi$). On se retrouve comme dans le cas précédent : sur $\mathbb{R}_*^+$, $h'(x)$ change de signe en une infinité de réels $y_k \in]k\pi, k\pi + \pi/2[$ $(k > 0)$. On en déduit les extrema locaux. Là encore, h admet un maximum global strict en 0.
- $k : x \mapsto \begin{cases} E(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ admet un minimum local en tout réel non nul qui n'est pas de la forme $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}^*$.
  Mais z admet également un maximum local en tout réel non nul !

EXERCICE 2

Bien entendu, les fonctions constantes répondent à la question. En fait ce sont les seules : si f est T-périodique et non constante, il existe a, b tels que $f(a) \neq f(b)$. En considérant $f(a + nT)$ et $f(b + nT)$ lorsque n tend vers $+\infty$, on voit qu'une éventuelle limite de f en $+\infty$ serait $f(a)$... mais aussi $f(b)$: contradiction avec l'unicité de la limite.

EXERCICE 3

- fg n'est pas nécessairement lipschitzienne : prendre $f = g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
- Cette fois, fg va être lipschitzienne : si $a, b \in D$, on peut écrire :

$$f(a)g(a) - f(b)g(b) = f(a)\big(g(a) - g(b)\big) + g(b)\big(f(a) - f(b)\big). \tag{1}$$

  Or f est K_f-lipschitzienne sur D borné, donc est bornée : si $D \subset [-M, M]$ et x_0 est fixé dans D, on écrit pour $x \in D$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K_f\,|x - x_0| \leq 2K_f M,$$

  donc

$$f(x_0) - 2K_f M \leq f(x) \leq f(x_0) + 2K_f M,$$

puis $|f(x)| \leq |f(x_0)| + 2K_f M$. De même, g est bornée.
Si on note M_f et M_g des majorants respectifs de f et g, on obtient grâce à (1) et à l'inégalité triangulaire :

$$|(fg)(a) - (fg)(b)| \leq M_f K_f |a-b| + M_g K_g |a-b| = K |a-b|,$$

avec $K = M_f K_f + M_g K_g$.

Exercice 4
On ne peut absolument rien dire!!!!!!!!! En effet, TOUTE fonction peut s'écrire comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire (cf cours)...

Exercice 5
Tout d'abord, notons $u_n = f(2^n)$: $u_{n+1} - u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\frac{u_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (preuve "en ε, à la Césaro", ou bien EN UTILISANT le théorème de Césaro pour $v_n = u_n - u_{n-1}$...).

Maintenant, fixons $\varepsilon > 0$: il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{f(2^n)}{n} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N_0$. Si on prend $x \geq 2^{N_0}$, on sait qu'il existe un unique entier $n \geq N_0$ tel que $2^n \leq x < 2^{n+1}$ (pourquoi ?). On peut alors écrire :

$$0 \leq f(x) \leq f(2^{n+1}) \leq (n+1)\varepsilon \leq (\ln_2 x + 1)\varepsilon \leq 2\varepsilon \ln x,$$

pour peu qu'on ait $\ln_2 x + 1 \leq 2 \ln x$, c'est-à-dire $1 \leq \ln x \big(2 - \frac{1}{\ln_2}\big)$, ce qui est le cas pour x assez grand, disons $x \geq X_0$.

Maintenant, on a :

$$\forall x \geq \mathrm{Max}(2^{N_0}, X_0), \qquad 0 \leq \frac{f(x)}{\ln x} \leq 2\varepsilon.$$

■

2 Aspects locaux de la continuité

Exercice 6
Déjà, les fonctions de la forme $x \mapsto ax$ ($a \in \mathbb{R}$) répondent au problème.
Réciproquement, soit f une solution : on sait qu'en posant $a = f(1)$, on a nécessairement $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{N}$ (récurrence) puis $\mathbb{Z}$ ($x + (-x) = 0$), puis $\mathbb{Q}$ ($p = q.\frac{p}{q}$). Fixons alors $x \in \mathbb{R}$: il existe une suite de rationnels (q_n) telle que $q_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. On a alors $f(q_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ (continuité de f en x), c'est-à-dire $aq_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$, mais par ailleurs, $aq_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ax$, de sorte que $f(x) = ax$.

Exercice 7
Déjà, l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ répond au problème. Par ailleurs, les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ ne sont pas solution lorsque $\alpha \neq 1$ (pourquoi regarder de telle fonctions ?). Cela peut nous inciter à penser que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est la seule solution.
Maintenant, fixons f UNE solution. Si $x > 0$, on a $f\big(xf(x)\big) = xf(x)$, donc $xf(x)$ appartient à $\mathcal{P}$, qui est donc non vide.
Imaginons que $\mathcal{P}$ contienne un élément $x_0 > 1$: on a alors $f(x_0^2) = x_0^2$, puis $f(x_0^4) = x_0^4$, puis par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f\big(x_0^{(2^n)}\big) = x_0^{(2^n)},$$

ce qui nous fournit une contradiction en faisant tendre n vers $+\infty$, car $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
De même, $\mathcal{P}$ ne contient pas d'élément < 1, donc $\mathcal{P} = \{1\}$, puis $xf(x) = 1$ pour tout $x > 0$, et finalement, $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Exercice 8

1. Commençons par traiter le cas $|a|<1$. FIXONS $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\forall y\in\mathbb{R},\qquad f(ay)=f(y).$$

En particulier ($y=x$, puis $y=ax\ldots$) : $f(x)=f(ax)=f(a^2x)$, et même par récurrence immmédiate : $f(x)=f(a^nx)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En faisant tendre n vers $+\infty$ et en utilisant la continuité de f en 0, on obtient $f(x)=f(0)$, et f est bien constante.

Si $|a|>1$, on fixe à nouveau x, et on a (en prenant $y=\dfrac{x}{a},\dfrac{x}{a^2},\cdots$) : $f(x)=f(x/a)=f(x/a^2)$, puis $f(x)=f(x/a^n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et on conclut de la même façon que plus haut.

2. Dans le cas où $|a|<1$, on fixe x, et on considère la suite arithmético-géométrique telle que $x_0=x$ et $x_{n+1}=ax_n+b$: cette suite converge (pourquoi ?) vers l unique réel vérifiant $l=al+b$, et $f(x_n)=f(x)$ pour tout $n\in\mathbb{R}$, de sorte qu'en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $f(x)=f(l)$. C'est gagné puisque l ne dépend pas de x.

Dans le cas $|a|>1$, on fixe à nouveau x, et on s'intéresse plutôt à la relation $f(y)=f\left(\dfrac{y}{a}-\dfrac{b}{a}\right)$ valable pour tout $y\in\mathbb{R}$.

Exercice 9

1. Une fonction est par définition lipschitzienne si et seulement si elle est 1-Hölderienne.
2. Supposons f Hölderienne, et fixons x dans son domaine de définition D et $\varepsilon>0$. On cherche η tel que $|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$ dès que $|x-y|\leq\eta$.

Puisque $|f(x)-f(y)|\leq K\,|x-y|^\alpha$, il suffit de prendre $\eta=\left(\dfrac{\varepsilon}{K}\right)^{1/\alpha}$!

Exercice 10

- $\chi_{[0,1]}$ est discontinue en 0 et 1 (limites à droite et à gauche distinctes), et continue partout ailleurs (car constante localement).
- Même chose pour $\chi_{]0,1[}$
- $\chi_{\mathbb{Z}}$ est discontinue en tout $n\in\mathbb{Z}$ ($f(n^+)=0\neq 1=f(n)$), et continue partout ailleurs (constante localement).
- $\chi_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout réel :
  - Si $x\in\mathbb{Q}$, en prenant $x_n=x+\dfrac{\sqrt{2}}{n}$, on a $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$, mais

$$f(x_n)=0\not\to 1=f(x).$$

  - Si $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, on considère cette fois $x_n=\dfrac{\lfloor 10^nx\rfloor}{10^n}\cdot$

Exercice 11

L'application $x\mapsto\begin{cases}E(1/x) & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ est continue en tout réel non nul qui n'est pas l'inverse d'un entier relatif (car constante localement), et est discontinue en tout autre point (limites à droite et à gauche distinctes).

Exercice 12

- Si $x\in\mathbb{Q}^*$, alors φ est discontinue en x : on considére une suite d'irrationnels tendant vers x, et on nie le caractère séquentiel de la continuité.
- φ est continue en 0, puisque si on fixe $\varepsilon>0$, alors $0\leq f(x)\leq\varepsilon$ dès que $|x|\leq\varepsilon$ (pourquoi ?)
- Si $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, on va montrer que f est continue en x. Par parité de φ, on peut supposer $x>0$. Fixons $\varepsilon>0$. On cherche $\alpha>0$ tel que sur $[x-\alpha,x+\alpha]$, il n'existe pas de rationnel r tel que $\varphi(r)>\varepsilon$, ce qui revient à dire qu'il n'existe pas dans $[x-\alpha,x+\alpha]$ de rationnel de la forme $\dfrac{p}{q}$ (écriture irréductible) avec $q<\dfrac{1}{\varepsilon}\cdot$

Considérons donc $E = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z},\ 1 \leq q < \frac{1}{\varepsilon} \right\}$. On cherche à montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $[x-\alpha, x+\alpha] \cap E = \emptyset$, ce qui revient à dire que la distance de x aux éléments de E est minorée par un réel α strictement positif. Mais si $\frac{p}{q} \in E$:

- si $p \leq 0$, $\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq x$;
- si $p \geq 2qx$, $\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq x$;
- si $0 < p < 2px$, on peut écrire :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq m = \mathrm{Min} \left\{ \left| x - \frac{r}{s} \right| \;\middle|\; 0 < r < 2px,\ 1 \leq s < \frac{1}{\varepsilon} \right\} > 0$$

(pourquoi ?).

C'est gagné en posant $\alpha = \frac{\mathrm{Min}(x,m)}{2}$.

3 Aspects globaux de la continuité

Exercice 13

Pour $t \in [0,2]$, notons $f(t)$ la distance parcourue du début de la marche jusqu'au temps t (en heure...). L'hypothèse "non quantique" signifie simplement que f est continue. On a par ailleurs $f(0) = 0$ et $f(2) = 12$.

Considérons la fonction auxiliaire $g : x \in [0,1] \mapsto f(x+1) - f(x)$: on a $g(0) + g(1) = 12$, donc 6 est la demi-somme de $g(0)$ et $g(1)$. 6 est donc situé entre $g(0)$ et $g(1)$, et le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure.

Exercice 14

1. - Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on peut s'inspirer de l'exercice précédent, en considérant $g : x \in [0, 1/2] \mapsto f(x+1/2) - f(x)$: $g(0) + g(1/2) = 0$, de sorte que $g(0)$ et $g(1/2)$ ne peuvent pas être tous les deux strictement positifs, ou tous les deux strictement négatifs, donc 0 est situé entre eux-deux, et le théorème des valeurs intermédiaires peut s'appliquer à g (qui est continue) entre 0 et 1/2, nous fournissant le résultat souhaité.
   - Dans le cas général, considérons $g : x \in [0, 1-\alpha] \mapsto f(x+\alpha) - f(x)$:

   $$g(0) + g(\alpha) + \cdots + g\big((n-1)\alpha\big) = 0.$$

   Si l'un des $g(k\alpha)$ est nul, c'est gagné. Sinon, $g(0)$ est par exemple > 0. Il existe forcément un $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $g(k\alpha) < 0$. Considérons donc k_0 le plus petit d'entre-eux, de sorte qu'on peut écrire : $g(k_0\alpha) < 0 < g\big((k_0-1)\alpha\big)$, et on peut maintenant appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à g entre $(k_0-1)\alpha$ et $k_0\alpha$.
2. Il suffit de noter que f_α vérifie effectivement les hypothèses de l'énoncé, mais que si $x \in [0, 1-\alpha]$, on a :

$$f_\alpha(x+\alpha) - f_\alpha(x) = \alpha \neq 0.$$

Exercice 15

Si $I = [a,b]$, on considère $g : x \mapsto f(x) - x$, qui est continue, et vérifie $g(a) \leq 0 \leq g(b)$. On applique ensuite le TVI (bien entendu, on avait fait un dessin auparavant...).

Exercice 16

Toujours avec $I = [a,b]$: $a \in [a,b] \subset f([a,b])$, donc il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = a$. De même, il existe $d \in [a,b]$ tel que $f(d) = b$. Si $g : x \in [a,b] \mapsto f(x) - x$, on a $g(c) = a - c \leq 0 \leq b - d = g(d)$, ce qui permet d'appliquer le TVI à g entre c et d...

Exercice 17

1. On a $f([-M,M]) \subset [f(0)-kM, f(0)+kM]$ (pourquoi ?), de sorte qu'on cherche $M>0$ tel que $-M \leq f(0)-kM$ et $f(0)+kM \leq M$, ce qui est possible car $0 \leq k < 1$. Il reste à appliquer l'exercice 15.
L'unicité est quasi-évidente : si a et b sont points fixes, on écrit $|f(a)-f(b)| \leq k\,|a-b|$, donc $|a-b| \leq k\,|a-b|$, ce qui pose problème si $a-b \neq 0$...
2. Par récurrence immédiate (cf l'éternel problème de bac des temps anciens ...) : $|x_n - X| \leq k^n\,|x_0 - X|$, ce qui fournit la convergence vers X. De plus, la différence $|x_n - X|$ tend "assez rapidement" vers 0, puisqu'elle est majorée par une suite géométrique de raison <1.

Exercice 18

1.
   - Traitons d'abord le cas $L=0$. Fixons $\varepsilon>0$. Il existe $X_0>0$ tel que pour tout $x \geq X_0$, $|f(x+1)-f(x)| \leq \varepsilon$. Pour ce même x, on peut écrire $|f(x+2)-f(x+1)| \leq \varepsilon$, donc (pourquoi ?) $|f(x+2)-f(x)| \leq 2\varepsilon$, puis (récurrence) $|f(x+n)-f(x)| \leq n\varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Après avoir fait un dessin, "raisonnons à l'envers" en prenant $x \geq X_0$, et en écrivant $|f(x)-f(x-k)| \leq k\varepsilon$, où k est un entier tel que $X_0 \leq x-k \leq X_0+1$ (justifier). On peut alors écrire :
   $$|f(x)-f(x-k)| \leq k\varepsilon \leq (x-X_0)\varepsilon \leq x\varepsilon,$$
   de sorte qu'en posant $M = \operatorname{Sup}\limits_{[X_0,X_0+1]} |f|$ (justifier), on obtient (justifier à nouveau !) :
   $$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{M}{x} + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$
   dès que $x \geq \operatorname{Max}(X_0, M/\varepsilon)$.
   - Le cas général se ramène au cas précédent en considérant $\widetilde{f} : t \mapsto f(t) - Lt$: $\widetilde{f}(t+1) - \widetilde{f}(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{\widetilde{f}(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puis $\dfrac{f(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} L$.
2. Pour $L=+\infty$, on fixe $K \in \mathbb{R}$. Il existe $X_0>0$ tel que pour tout $x \geq X_0$, $f(x+1) \geq f(x)+K$. On a alors $f(x+n) \geq f(x)+nK$... le principe est le même, et on arrive à une minoration de la forme :
$$\frac{f(x)}{x} \geq K - \frac{M}{x} \geq K-1$$
dès que $x \geq \operatorname{Max}(X_0, M)$.

Exercice 19

Il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \leq A$, $1514 \leq f(x) \leq 1516$. En particulier, $f(A) \geq 1514$.

Par ailleurs, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq B$, $f(x) \leq -1000$. En particulier, $f(B) \leq -1000$.

On observe alors que f est continue, avec $f(B) < 1024 < f(A)$, et on applique un théorème bien utile quand on dispose de fonctions continues.

Exercice 20

1. Supposons f k-lipschitzienne, et fixons $\varepsilon>0$: il suffit de prendre $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{k}$ pour avoir :
$$\forall x,y \in I, \qquad |x-y| \leq \alpha \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon.$$
2. Supposons f zblorgienne sur I, et fixons $x_0 \in I$. Pour établir la continuité en x_0, on fixe $\varepsilon>0$: il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $x,y \in I$, $|x-y| \leq \alpha$ implique $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. EN PARTICULIER, si $x \in I$ vérifie $|x-x_0| \leq \alpha$, alors $|f(x)-f(x_0)| \leq \varepsilon$, ce qui établit la continuité de f en x_0.
Notons qu'ici, lorsque ε est fixé, α ne dépend pas de x_0 : il est "uniforme".
3. On cherche $\varepsilon>0$ tel que quelque soit $\alpha>0$ ("même très petit"), il existe $x,y \in \mathbb{R}$ tels que $|x-y| \leq \alpha$ et $\left|x^2-y^2\right| > \varepsilon$.
Fixons $\varepsilon=1$ (sait-on jamais...) et $\alpha>0$. On cherche x et y proches, mais de carrés éloignés. On peut essayer $y = x+\alpha$ (ils seront ainsi assez proche... mais pas trop ! et on élimine une inconnue...). On est alors amené à chercher $x \in \mathbb{R}$ tel que $|\alpha(\alpha+2x)| > 1$, ce qui doit être possible en prenant x assez grand.

4. Soit f continue sur le segment I. Supposons f non zblorgienne : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver $x_n, y_n \in I$ tels que $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$.

   (x_n) est un valeurs dans un segment, donc il existe une injection croissante φ et $l \in \mathbb{R}$ tel que $x_{\varphi(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$. On a alors $y_{\varphi(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$ (pourquoi ?), donc par continuité de f en l : $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(l)$ et $f(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(l)$, si bien qu'en passant à la limite l'inégalité $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$, on obtient $0 \geq \varepsilon$: problème... ■

   On vient de montrer le "théorème de Heine".

5. Le caractère zblorgien de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, 2]$ vient du fait que $[0, 2]$ est un segment. Sur $[1, +\infty[$, f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne (utiliser l'inégalité des accroissements finis, ou écrire : $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$) donc zblorgienne.

   Recollons les morceaux. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe α_1 et α_2 tels que si $x, y \in [0, 2]$ (resp. $[1, +\infty[$) avec $|x - y| \leq \alpha_1$ (resp. $|x - y| \leq \alpha_2$), alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. On a alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \qquad |x - y| \leq \mathrm{Min}(\alpha_1, \alpha_2, 1) \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Exercice 21

Si $f(0) < 0$, la fonction $-f$ vérifie les mêmes hypothèses que f, et prend une valeur strictement positive en 0. On peut donc directement supposer : $f(0) > 0$.

Fixons n un entier strictement positif et strictement plus grand que $f(1)$: l'application $g : x \mapsto f(x) - nx$ est continue, strictement positive en 0 et strictement négative en 1, donc (TVI) s'annulle en $a \in]0, 1[$. On a alors $f(a) = na$, ce qui pose problème que a soit rationnel ou irrationnel.

Une autre version consiste à considérer $g : x \mapsto f(x) - x$: g est continue, et à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (pourquoi ?), donc est constante (si g prenait deux valeurs distinctes a et b, il existerait un rationnel compris entre a et b, et le théorème des valeurs intermédiaires assurerait que g prend cette valeur rationnelle, ce qui est exclu). Ainsi, f est de la forme $x \mapsto x + a$. On a alors $f(a) = 2a$, ce qui pose problème que a soit rationnel ou non.

4 Relations de comparaison

Exercice 22

Supposons f paire, avec $f(x) = P(x) + o(x^n)$, où P est un polynôme de degré $\leq n$. On a alors $f(-x) = P(-x) + o(x^n) = P(x) + o(x^n)$, donc $P(x) - P(-x) = o(x^n)$. On veut montrer que $Q : x \mapsto P(x) - P(-x)$ est nulle. Il s'agit d'une application polynômiale de degré $\leq n$, donc de la forme $x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Imaginons $Q \neq 0$: il existe un coefficient $a_i \neq 0$. Notons i_0 le plus petit des i tels que $a_i \neq 0$: on a alors $Q(x) = a_{i_0} x^{i_0} + o(x^{i_0}) = o(x^n)$, donc en divisant par x^{i_0} pour $x > 0$: $a_{i_0} + o(1) = o(x^{n-i_0})$, et on obtient une contradiction en faisant tendre x vers 0^+.

Le lecteur vérifiera qu'il a bien compris en traitant le cas où f est impaire.

Exercice 23

On veut montrer : $\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, ou encore : $\frac{\ln f(x) - \ln g(x)}{\ln g(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or le numérateur vaut $\ln \frac{f(x)}{g(x)}$, qui tend vers 0 en $+\infty$, grâce à la continuité de ln en 1 ; comme le dénominateur tend vers $+\infty$, tout le monde est d'accord pour que $\frac{\ln f(x) - \ln g(x)}{\ln g(x)}$ tende vers 0 en $+\infty$, et c'est gagné.

Exercice 24

- On a immédiatement (?) $f(x) = \frac{2\cos x - x\tan x}{\sin^3 x} \sim \frac{2}{x^3}$, donc $f \underset{0^+}{\longrightarrow} +\infty$, $f \underset{0^-}{\longrightarrow} -\infty$, et f n'admet donc pas de limite en 0.

- $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ et $\tan x = x + x^3/3 + o(x^3)$, donc le numérateur vaut $(-1/2 - 1/3)x^3 + o(x^3)$ donc est équivalent à $-\dfrac{5}{6}x^3\cdot$ Par ailleurs, $\tan x - x \sim \dfrac{x^3}{3}$, donc le dénominateur est équivalent à $\dfrac{x^4}{3}$, puis $\dfrac{2\cos x - x\tan x}{\sin x(\tan x - x)} \sim \dfrac{6}{x^4} \underset{0}{\longrightarrow} +\infty$.
- On a une expression de la forme α_n^n, avec $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. On ne peut donc pas conclure tout de suite : il faut faire un DL de α_n avec le terme en $\dfrac{1}{n}$ (pour le passage à la forme exponentielle).
$\dfrac{\pi}{3n+1} \sim \dfrac{\pi}{3n}$, donc $\cos\dfrac{\pi}{3n+1} = 1 + O(1/n^2) = 1 + o(1/n)$. De même, $\dfrac{\pi}{6n+1} \sim \dfrac{\pi}{6n}$, donc $\sin\dfrac{\pi}{6n+1} = \dfrac{\pi}{6n} + o(1/n)$, donc
$$\cos\frac{\pi}{3n+1} + \sin\frac{\pi}{6n+1} = 1 + \frac{\pi}{6n} + o(1/n),$$
puis
$$\ln\Big(\cos\frac{\pi}{3n+1} + \sin\frac{\pi}{6n+1}\Big) \sim \frac{\pi}{6n},$$
puis
$$n\ln\Big(\cos\frac{\pi}{3n+1} + \sin\frac{\pi}{6n+1}\Big) \sim \frac{\pi}{6},$$
puis (ETAPE TRES IMPORTANTE) :
$$n\ln\Big(\cos\frac{\pi}{3n+1} + \sin\frac{\pi}{6n+1}\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{6},$$
et enfin grâce à la *continuité* de la fonction exponentielle :
$$\Big(\cos\frac{\pi}{3n+1} + \sin\frac{\pi}{6n+1}\Big)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\frac{\pi}{6}\cdot$$
- On se retrouve à nouveau dans une situation de la forme β_n^n, avec $\beta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. On va donc faire des DL en $\dfrac{1}{n}\cdot$ On a :
$$\frac{n\pi}{3n+1} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3(3n+1)} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9n} + o(1/n);$$
de même :
$$\frac{n\pi}{6n+1} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{36n} + o(1/n).$$
"Plus tard"[1] on saura faire des DL au voisinage de $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{6}$, mais provisoirement, on va se ramener en 0, en écrivant :
$$\cos\frac{n\pi}{3n+1} = \frac{1}{2}\cos\Big(\frac{\pi}{9n} + o(1/n)\Big) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\Big(\frac{\pi}{9n} + o(1/n)\Big) = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{18n} + (1/n).$$
De même :
$$\sin\frac{n\pi}{6n+1} = \frac{1}{2}\cos\Big(\frac{\pi}{36n} + o(1/n)\Big) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\Big(\frac{\pi}{36n} + o(1/n)\Big) = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{72n} + (1/n).$$
Puis :
$$\cos\frac{n\pi}{3n+1} + \sin\frac{n\pi}{6n+1} = 1 + \frac{\pi\sqrt{3}}{24n} + o(1/n),$$
et ensuite :
$$\Big(\cos\frac{n\pi}{3n+1} + \sin\frac{n\pi}{6n+1}\Big)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\frac{\pi\sqrt{3}}{24}\cdot$$

[1] prochain chapitre, avec la formule de Taylor-Young

- – En 0, on écrit $1+\operatorname{sh} x = 1+x+o(x)$, puis $\ln(1+\operatorname{sh} x) \sim x$, puis $\dfrac{\ln(1+\operatorname{sh} x)}{x} \xrightarrow[0]{} 1$, et enfin : $(1+\operatorname{sh} x)^{1/x} \xrightarrow[0]{} \mathrm{e}$.
  – En $+\infty$, on factorise comme toujours le plus gros terme :
  $$1+\operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(1+2\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}),$$
  puis : $\ln(1+\operatorname{sh} x) = x - \ln 2 + o(1)$, $\dfrac{\ln(1+\operatorname{sh} x)}{x} = 1+o(1)$, et enfin : $(1+\operatorname{sh} x)^{1/x} \xrightarrow[+\infty]{} \mathrm{e}$.
- On commence par passer à la forme exponentielle :
  $$g(x) = \big(\ln(1+\sin x)\big)^{1/x} = \exp\Big(\frac{\ln\big(\ln(1+\sin x)\big)}{x}\Big).$$
  g n'est pas définie sur $\mathbb{R}^-$ (ne pas écouter les délires de Maple), et : $\ln\big(\ln(1+\sin x)\big) \xrightarrow[0^+]{} -\infty$, donc $g(x) \xrightarrow[0^+]{} 0$.

Exercice 25

- La fonction $f : x \mapsto \cos(\sin x) - \cos(\tan x)$ est paire, nulle en 0 ; ses DL seront donc paires. Si on se contente de travailler à l'ordre 2, on va trouver $f(x) = o(x^2)$ (le faire tout de même !) ; on va donc travailler à l'ordre 4 en x. On écrit donc $\sin x = x\big(1 - x^2/6 + o(x^3)\big) \sim x$, puis :
  $$\begin{aligned} \cos\sin x &= 1 - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^4 x}{24} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2}(1 - x^2/3) + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4). \end{aligned}$$
  On écrit de même : $\tan x = x\big(1 + x^2/3 + o(x^3)\big) \sim x$, puis :
  $$\begin{aligned} \cos\tan x &= 1 - \frac{\tan^2 x}{2} + \frac{\tan^4 x}{24} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2}(1 + 2x^2/3) + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{7x^4}{24} + o(x^4), \end{aligned}$$
  et enfin :
  $$\cos\sin x - \cos\tan x = \frac{x^4}{2} + o(x^4) \sim \frac{x^4}{2}.$$
- On factorise le terme principal : $\operatorname{ch} x - 1515 = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}(1 - 3030\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x})$, puis :
  $$\ln(\operatorname{ch} x - 1515) = x - \ln 2 + o(1) \sim x.$$

Exercice 26

1. On écrit sans erreur : $1 + x + \cdots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x}$, puis :
   $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + x^n\frac{x}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n).$$
2. Déjà, les foncions tan et tanh sont impaires, donc on s'attend à touver des DL impairs.
   Puisque x est en facteur dans $\sin x$, on peut effectuer le DL de $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 5 :
   $$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}\big(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3)\big)} = 1 + \frac{x^2}{2}\Big(1 - \frac{x^2}{12}\Big) + \frac{x^4}{4} + o(x^5) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à multiplier soigneusement deux DL :

$$\begin{aligned}\tan x &= x\Big(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\Big)\Big(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^5)\Big)\\ &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^6).\end{aligned}$$

On opère de même pour tanh, et on trouve comme Maple :

$$\tanh x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^6).$$

Exercice 27

On écrit formellement $\arcsin x = ax+bx^3+o(x^4)$ (on utilise l'imparité de arcsin…), puis on injecte dans la relation $\sin(\arcsin x)=x$, valable pour tout $x\in[-1,1]$. En composant avec le DL de sin en 0, on obtient comme Maple :

$$x = ax+\Big(b-\frac{a^3}{6}\Big)x^3+o(x^4).$$

Or $x=x+o(x^4)$, donc par *unicité* du DL, on obtient $a=1$, et $b-\frac{a^3}{6}=0$, soit $b=\frac{1}{6}\cdot$

Les calculs partant de la relation $\sin(\arcsin x)$ donnent le même résultat, mais ne font intervenir que des termes linéaires en les inconnues.

Le reste des calculs est dans la feuille de travail Maple…

Exercice 28

- On factorise comme toujours le terme principal (on travaille ici au voisinage de $+\infty$) :

$$\begin{aligned}f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+4} &= x(1+x^{-2})^{1/2}-\sqrt{2}x(1+2x^{-2})^{1/2}\\ &= (1-\sqrt{2})x+\frac{1/2-\sqrt{2}}{x}+o(1/x),\end{aligned}$$

  de sorte qu'en $+\infty$, le graphe de f admet pour asymptote la droite d'équation $y=(1-\sqrt{2})x$. De plus, $f(x)-(1-\sqrt{2})x\sim\frac{1/2-\sqrt{2}}{x}$, donc cette différence est négative AU VOISINAGE DE $+\infty$, donc le graphe est situé sous l'asymptote.
  Au voisinage de $-\infty$, la parité de f nous assure que Γ est située sous son asymptote, qui est la droite d'équation $y=(\sqrt{2}-1)x$.
- – en $+\infty$, on factorise le terme principal dans le ln :

$$\ln \operatorname{ch} x = x-\ln 2+\ln(1+\mathrm{e}^{-2x}),$$

  donc la droite d'équation $y=x-\ln 2$ est asymptote, située dessous le graphe (pourquoi ?) au voisinage de $+\infty$.
  – l'étude en $-\infty$ est inutile (parité).
  – En 0 : ce sont les termes constants qui sont principaux. On fait un DL à l'ordre 2 : $\operatorname{ch} x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$, donc $\ln(\operatorname{ch} x)\sim\frac{x^2}{2}$, de sorte que la droite d'équation $y=0$ est tangente au graphe, et située dessous.
  Réflexion faite, c'était évident sans calcul (parité) ! ! !
- Au voisinage de $+\infty$, on écrit $x^{1/x}=\exp\frac{\ln x}{x}\underset{+\infty}{\longrightarrow}\mathrm{e}^+$, donc la droite d'équation $y=\mathrm{e}$ est asymptote, située dessous le graphe de $x\mapsto x^{1/x}$ au voisinage de $+\infty$.
  Au voisinage de 0^+, on a sans mal $x^{1/x}\underset{0}{\longrightarrow}0$ et $\frac{x^{1/x}}{x}\underset{0}{\longrightarrow}0$, donc la droite d'équation $y=x$ est asymptote au graphe (on ne peut pas vraiment parler de tangente, dans la mesure où $x\mapsto x^{1/x}$ n'est a priori pas défini en 0.