Continuité des fonctions numériques d'une variable réelle

1 Généralités

Exercice 1 Déterminer les extrema locaux (éventuellement globaux) des applications suivantes (on pourra anticiper sur le cours sur la dérivation) :
- $x \mapsto \sin x + \cos x$;
- $x \mapsto \tan x$;
- (*) $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
- (*) $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2} \cos x$;
- $x \mapsto \begin{cases} E(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 2 Existe-t-il $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique admettant une limite en $+\infty$?

Exercice 3
- Si f et g sont lipschitziennes, qu'en est-il du produit fg ?
- Même question si f et g sont définies sur un domaine borné.
  On pourra montrer qu'une fonction lipschitzienne sur un domaine borné est bornée.

Exercice 4 Que peut-on-dire de la parité de $f + g$ si f est paire et g impaire ?

Exercice 5 (**) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que : $f(2x) - f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer : $\dfrac{f(x)}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On travaillera "avec des ε", en commençant par montrer "à la Césaro" : $\dfrac{f(2^n)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2 Aspects locaux de la continuité

Exercice 6 Déterminer les applications *continues* sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 7 (**) Déterminer les applications $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ telles que $f \underset{0}{\longrightarrow} +\infty$, $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, et :

$$\forall x, y > 0, \qquad f\big(xf(y)\big) = yf(x).$$

On commencera par chercher une solution parmi les fonctions que l'on connait. Ensuite, on pourra montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des points fixes d'une solution quelconque f est nécessairement non vide, puis (par l'absurde) qu'il ne contient pas d'élément > 1, et pas non plus d'élément < 1.

Exercice 8
1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(ax) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où a est fixé différent de 1 et -1. Montrer que f est constante *(commencer par le cas $|a| < 1$)*.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(ax+b) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où a est fixé différent de 1 et -1, et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 9 Soit $\alpha > 0$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dit α-Hölderienne lorsqu'il existe $K > 0$ telle que $|f(x) - f(y)| \leq K\, |x-y|^{\alpha}$ pour tout $x, y \in I$. f sera dit Hölderienne lorsqu'elle est α-Holderienne pour un certain $\alpha > 0$.

1. Montrer que si f est lipschitzienne, alors elle est Hölderienne (pas trop dur…).
2. Montrer que si f est Hölderienne, alors elle est continue.

Exercice 10 Discuter la continuité des fonctions caractéristiques de $[0,1]$, $]0,1[$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$. *Pour d'éventuelles discontinuités, on pourra utiliser les limites à droite et gauche ou des suites bien choisies : inutile de sortir les ε.*

Exercice 11 Discuter la continuité de $x \mapsto \begin{cases} E(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 12 (**) Discuter la continuité de l'application φ qui à $x \in \mathbb{R}$ associe 0 si $x \notin \mathbb{Q}$, et $\dfrac{1}{q}$ si $x = \dfrac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, l'écriture $\dfrac{p}{q}$ étant irréductible.

3 Aspects globaux de la continuité

Exercice 13 Un marcheur ("non quantique") parcourt 12 kilomètres en 2 heures. Montrer qu'il y a un intervalle d'une heure pendant lequel il a effectué exactement 6 kilomètres.

Exercice 14 (*) *"Théorème des cordes" de Paul Levy*

1. Soit α de la forme $1/n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour toute application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$, il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0 + \alpha) = f(x_0)$. *On commencera par le cas $\alpha = \dfrac{1}{2}$.*
2. Soit $\alpha \in]0,1[$ tel que $1/\alpha \notin \mathbb{N}$. En considérant $f_\alpha : x \mapsto x - \dfrac{\sin^2(\pi x/\alpha)}{\sin^2(\pi/\alpha)}$, vérifier que la propriété précédente est fausse.

Exercice 15 Soit I un segment et f une application continue telle que $f(I) \subset I$. Montrer que f admet (au moins) un point fixe.

Exercice 16 (*)

Reprendre l'exercice précédent, avec cette fois $I \subset f(I)$.

Exercice 17 (*) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ K-lipschitzienne avec $0 \leq K < 1$ (f est dite *contractante*).

1. Montrer que f admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$, noté X.
   Pour l'existence, on cherchera une condition suffisante simple sur M pour avoir $f([-M,M]) \subset [-M,M]$, puis on utilisera l'exercice 15.
2. Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$, et posons $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer : $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ "rapidement" (notion à préciser !).

Exercice 18 (**)

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue qui vérifie : $f(t+1) - f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} L \in \mathbb{R}$. Montrer : $\dfrac{f(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} L$. *On commencera par traiter "avec des ε" le cas $L = 0$.*

2. Même chose avec $L=+\infty$.

EXERCICE 19 Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que $f\underset{-\infty}{\longrightarrow}1515$ et $f\underset{+\infty}{\longrightarrow}-\infty$. Montrer qu'il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=1024$.

EXERCICE 20 (**)
Une fonction $f:I\to\mathbb{R}$ sera dite *zblorgienne* lorsque :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0;\ \forall x,y\in I,\quad |x-y|\leq\alpha\ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)|\leq\varepsilon.$$

1. Montrer que si f est lipschitzienne, alors elle est zblorgienne.
2. Montrer que si f est zblorgienne, alors $f\in\mathcal{C}(I)$.
3. Montrer que l'application $x\in\mathbb{R}\mapsto x^2$ n'est pas zblorgienne.
4. Montrer que si I est un segment et $f\in\mathcal{C}(I)$, alors f est zblorgienne.
   Dur : raisonner par l'absurde, utiliser des suites, puis Bolzano-Weierstraß.
5. Montrer que $x>0\mapsto\sqrt{x}$ est zblorgienne.
   On utilisera deux raisonnements différents sur $[0,2]$ *et sur* $[1,+\infty[$*, puis on recollera les morceaux.*

***NB :** "Parfois", on dit "uniformément continue" à la place de "zblorgienne".*

EXERCICE 21 (*) Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ envoyant les rationnels sur des irrationnels et réciproquement.
On pourra raisonner par l'absurde, supposer $f(0)>0$, et trouver $p\in\mathbb{Q}^*$ tel que le graphe de f intersecte la droite passant par l'origine et de pente p. Une version plus astucieuse DONC moins bonne consiste à montrer que $f(x)+x$ est toujours irrationnel, donc est constant...

4 Relations de comparaison

EXERCICE 22 Si f est paire (resp. impaire) et admet un DL en 0 : $f(x)\underset{0}{=}P(x)+o(x^n)$ avec P un polynôme de degré $\leq n$, montrer que P est paire (resp. impaire).

EXERCICE 23 Si $f\underset{+\infty}{\sim}g$ et $f\underset{+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, montrer que $\ln f(t)\underset{+\infty}{\sim}\ln g(t)$ (résultat à ne pas retenir... ou plutôt à ne jamais appliquer sans sa preuve).

EXERCICE 24 Déterminer les limites (éventuelles) de :
- $\dfrac{2\cos x-x\tan x}{\sin^3 x}$ lorsque $x\to 0$;
- $\dfrac{x\cos x-\tan x}{\sin x(\tan x-x)}$ lorsque $x\to 0$;
- $\left(\cos\dfrac{\pi}{3n+1}+\sin\dfrac{\pi}{6n+1}\right)^n$ lorsque $n\to+\infty$;
- (*) $\left(\cos\dfrac{n\pi}{3n+1}+\sin\dfrac{n\pi}{6n+1}\right)^n$ lorsque $n\to+\infty$;
- $(1+\operatorname{sh}x)^{1/x}$ lorsque $x\to 0$ et $x\to+\infty$;
- $\big(\ln(1+\operatorname{sh}x)\big)^{1/x}$ lorsque $x\to 0$.

EXERCICE 25 Déterminer des équivalents simples de :
- $\cos(\sin x)-\cos(\tan x)$ au voisinage de 0.
- $\ln(\operatorname{ch}x-1515)$ au voisinage de $+\infty$.

EXERCICE 26
1. En partant de $1+x+\cdots+x^n$, retrouver le DL en 0 à l'ordre n de $\dfrac{1}{1-x}$.

2. En les voyant comme des quotients, donner les DLs à l'ordre 6 des fonctions tan et tanh au voisinage de 0.

EXERCICE 27 On admet que la fonction arcsin admet un DL en 0 à tout ordre. Déterminer ce DL à l'ordre 4 puis 6.
On pourra partir d'une forme a priori de ce DL, et l'injecter dans l'écriture $\sin(\arcsin x) = x$ *ou* $\arcsin(\sin x) = x$*, valable pour* x *au voisinage de* 0*.*

EXERCICE 28 Etudier les asymptotes éventuelles des applications suivantes :
- $x \mapsto \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2x^2+4}$;
- $x \mapsto \ln \operatorname{ch} x$: étude en 0 (tangente), $+\infty$ et $-\infty$;
- $x > 0 \mapsto x^{1/x}$: étude en 0 et $+\infty$.