Groupes, anneaux, corps

1 Groupes

EXERCICE 1 Soit $*$ une LCI associative sur E, admettant un neutre e. Montrer que si $x \in E$ admet un symétrique y_1 à gauche ($y_1 * x = e$) et y_2 à droite ($x * y_2 = e$), alors $y_1 = y_2$.

EXERCICE 2 Soient $(G_1, *)$ et (G_2, ∇) deux groupes. On munit l'ensemble $G_1 \times G_2$ de la loi : $(g_1, g_2) \otimes (h_1, h_2) = (g_1 * h_1, g_2 \nabla h_2)$.

Montrer que $(G_1 \times G_2, \otimes)$ est un groupe. On parle de "*structure produit* canonique" pour $G_1 \times G_2$.

EXERCICE 3 Montrer que $z \mapsto z^n$ réalise un endomorphisme de $(\mathbb{C}^*, .)$. Déterminer son image et son noyau.

EXERCICE 4 (*)

Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ (en trouver "un certain nombre", puis montrer qu'on les a tous !).

EXERCICE 5 H_1, H_2 sont deux sous-groupes d'un même groupe $(H, .)$.

1. Montrer que $H_1 \cup H_2$ est un groupe si et seulement si l'un est inclus dans l'autre.
2. (*) Montrer que H_1H_2 est un groupe ssi $H_1H_2 = H_2H_1$ (H_1H_2 est l'ensemble des xy, pour $x \in H_1$ et $y \in H_2$).

2 Anneaux

EXERCICE 6 Soient A_1 et A_2 deux anneaux. En s'inspirant de l'exercice 2, constuire deux lois $\oplus$ et $\otimes$ telles que $(A_1 \times A_2, \oplus, \otimes)$ soit un anneau.

Déterminer les inversibles de $A_1 \times A_2$ en fonction de ceux de A_1 et A_2.

EXERCICE 7 Déterminer les sous anneaux de $\mathbb{Z}$ (!)

EXERCICE 8 Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un anneau intègre ; déterminer ses inversibles.

EXERCICE 9 Soit E l'ensemble des applications $f \in \mathcal{C}([0,1])$ telles que $f(0) = f(1)$. Montrer que E (muni de la somme et du produit des fonctions) est un anneau.

EXERCICE 10 On considère l'anneau $A = \mathbb{R}^{[0,2]}$, et on note A_1 l'ensemble des $f \in A$ uniformément nulles sur $]1, 2]$. Montrer que $(A_1, +, .)$ est un anneau, mais que ce n'est pas un sous-anneau de A.

EXERCICE 11 Déterminer les diviseurs de 0 ainsi que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}^I$, où I est un ensemble non vide.

On rappelle que $\mathbb{Z}^I$ désigne l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{Z}$, et que cet ensemble est muni de la somme et du produit naturels.

EXERCICE 12 (**)

Soit $\mathcal{S}_t$ l'ensemble des suites entières stationnaires (suites à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et constantes APCR).

1. Vérifier que $\mathcal{S}_t$ est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.
2. Déterminer les morphismes d'anneaux de $\mathcal{S}_t$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 13 (*) *L'anneau $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit un anneau à n éléments, noté $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ de la façon suivante Tout d'abord, $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, et on définit deux LCI $\oplus$ et $\otimes$ de la façon suivante : si $a, b \in \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, $a \oplus b$ (resp. $a \otimes b$) est le reste dans la division euclidienne de $a + b$ (resp. ab) par n.

- Montrer que $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, \oplus, \otimes)$ est un anneau commutatif.
- Déterminer les "tables d'addition et de multiplication" de $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ pour $2 \leq n \leq 5$.
- Soit $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ l'application qui à a associe le reste dans la division euclidienne de a par n. Montrer que φ est un morphisme d'anneaux. Donner son image et son noyau.
- Quel est le reste dans la division euclidienne de 1515^{1515} par 7 ?
  On pourra utiliser la question précédente, et l'algorithme d'exponentiation rapide dans $\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}$. On trouvera comme Maple :
  ```
  >1515^1515 mod 7;
              6
  ```

3 Corps

Exercice 14 (*)

Soit A un anneau intègre fini et commutatif. Montrer que c'est un corps.

A $x \neq 0_A$ fixé, on pourra montrer que l'application $y \mapsto xy$ induit une injection de $A \setminus \{0\}$ dans lui-même, et en déduire l'existence d'un inverse pour x.

Exercice 15 Montrer qu'un morphisme (d'anneaux) entre deux corps est nécessairement injectif.

Exercice 16 Montrer que $\mathbb{Q}[i] = \{p + qi \,|\, p, q \in \mathbb{Q}\}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Exercice 17 Montrer que $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ (exercice 13) est un corps si et seulement si n est premier (on pourra utiliser l'exercice 14).