Matrices

1 Généralités

EXERCICE 1 On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices (n,n) triangulaires supérieur dont la diagonale est constituée de 1 (matrices unipotentes) ; montrer que $\mathcal{U}$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.

EXERCICE 2 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer qu'existent $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que : $A^2 = \lambda A + \mu I_2$.

EXERCICE 3 On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie :

$$A^{1515} + \lambda_{1514}A^{1514} + \cdots + \lambda_1 A + \lambda_0 I_n = 0.$$

Montrer que si $\lambda_0 \neq 0$, alors A est inversible. Réciproque ?

EXERCICE 4 On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec tous les $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A est une matrice scalaire (de la forme λI_n). *On considerera des produits AB pour B élémentaire bien choisie.*

EXERCICE 5 Si $1 \leq i, j \leq n$, montrer que $I_n + E_{i,j}$ est inversible. En déduire un résultat légèrement plus fort que celui donné dans l'exercice précédent.

EXERCICE 6 *Un isomorphisme classique*
On considère l'application entre les $\mathbb{R}$-algèbres $\mathbb{C}$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\Phi \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ a+ib & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Montrer que Φ est un morphisme d'algèbre injectif non surjectif. Vérifier ensuite que $\operatorname{Im}\Phi$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Ainsi, on peut voir $\mathbb{C}$ comme une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On verra plus tard que Φ induit même un isomorphisme entre les groupes multiplicatifs $\mathbb{U}$ et $SO_2(\mathbb{R})$ ("groupe spécial orthogonal"). Enfin, si on considère l'application linéaire

$$\Psi \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ (a,b,c,d) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a+bi & c-di \\ c+di & a+bi \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

l'image $\mathbb{H}$ de Ψ a une structure très particulière : c'est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 4 (en donner une base...) qui est aussi un anneau... et tout élément non nul de $\mathbb{H}$ admet un symétrique pour la multiplication : c'est un "espèce de corps" (en fait, il a tout d'un corps sauf le caractère commutatif). Les éléments de $\mathbb{H}$ sont appelés les quaternions.

2 Représentation des applications linéaires

EXERCICE 7 Donner la matrice représentant (entre les bases canoniques des espaces en jeu) l'application

$$\varphi \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & \left(P'(1), \int_0^1 P\right) \end{array} \right.$$

Exercice 8 *Polynômes de Hermite*
On définit les polynômes suivants : $H_0 = 1$, $H_1 = X$, et pour $k \geq 2$:

$$H_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la matrice représentant dans la base $(H_0, \dots, H_n)$ de $\mathbb{C}_n[X]$ (justifier) l'endomorphisme $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

Exercice 9 $E = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1,1)$ et $v_2 = (1,-1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$; donner les matrices de passage entre $\mathcal{B}$ et la base canonique.

Exercice 10 $E = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,-1,0)$, $v_3 = (1,1,1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$; donner les matrices de passages entre $\mathcal{B}$ et la base canonique.
2. Donner la matrice dans la base canonique de la projection sur le sous-espace $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ parallèlement à $\mathbb{R}v_3$.

Exercice 11 Soit E un espace de dimension 3 et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Analyse-synthèse : montrer qu'il est nécessaire *d'avoir* $u^2(e_3) \neq 0$*. Réciproquement...*

Exercice 12 (*) *Archi classique...*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ "à diagonale dominante", ce qui signifie que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > \displaystyle\sum_{k \neq i} |a_{i,k}|$.
Montrer que A est inversible.
On pourra montrer (par l'absurde) que l'AL associée à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est injective.

Exercice 13 (*)
On considère n complexes distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et on pose :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots\dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots\dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots\dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

("matrice de *Vandermonde*"). Montrer que V est inversible.
On pourra montrer que V est une matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et une base de polynômes d'interpolation...

3 Rang, inversibilité

Exercice 14 Donner le rang des matrices suivantes. Lorsque c'est possible, les inverser :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ b & 1 & a \\ a & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 16 Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 17 Montrer que toute matrice (carrée !) peut s'écrire comme somme de deux matrices inversibles. *Indication : Réduction du rang ou matrices triangulaires....*

Exercice 18 Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer : $\mathrm{rg}(A+B) \leq \mathrm{rg}\ A + \mathrm{rg}\ B$ et (si $n = p$) :

$$\mathrm{rg}\ A + \mathrm{rg}\ B - n \leq \mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{Min}(\mathrm{rg}\ A, \mathrm{rg}\ B).$$

Remarque : il s'agit d'un faux exo sur les matrices...

Exercice 19 Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si il existe deux vecteurs colonnes $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nuls tels que $A = X{}^tY$.

Exercice 20 (*)
Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ non constante telle que pour toutes matrices $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $f(PQ) = f(P)f(Q)$. On se propose de montrer que A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.

1. Montrer que $f(0) = 0$ et $f(I_n) = 1$.
2. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible, alors $f(A)$ est inversible.
3. Soient P et Q de même rang. Montrer que $f(P) \neq 0$ si et seulement si $f(Q) \neq 0$.
4. En déduire le résultat annoncé.
   On pourra raisonner par l'absurde, et considérer le plus petit entier $r > 0$ tel que pour toute matrice A de rang r, on a $f(A) \neq 0$.

4 Puissances de matrices

Exercice 21 Si n est pair, montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^{2048} = -I_n$. On pourra commencer par le cas $n = 2$.
Remarque : si n est impair, il n'existe pas de telle A, ce que l'on peut voir en évaluant les déterminants des deux membres...

Exercice 22 Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^{1515} = -I_n$? (!!!)

Exercice 23 Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$. On écrira $A = 2I_3 + N$, et on appliquera une formule bien utile dans les anneaux...

Exercice 24 Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, lorsque A est la matrice (n, n) constituée uniquement de 1, et lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 25 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer : $A^2 = A + 2I$; en déduire A^n si $n \in \mathbb{N}$ (effectuer la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$). Même travail avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 26 Ici, $E = \mathbb{R}^3$. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique. On définit $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 + e_3$, $f_3 = e_2 + e_3$.

1. Donner dans la base (f_1, f_2, f_3) (justifier) la matrice A de l'application dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Calculer A^n ; en déduire B^n.