Matrices

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps : $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tous les espaces vectoriels en jeu sont de dimension finie.

1 Présentation de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1.1 Espace des matrices (n,p)

Définition 1

- Soient $n,p\in\mathbb{N}^*$. Une *matrice* (n,p) ("n lignes p colonnes") à coefficients[1] dans $\mathbb{K}$ est une aplication de $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$. De même que pour une suite, on note u_n plutôt que $u(n)$, on notera également pour les matrices $m_{i,j}$ au lieu de $M(i,j)$. On représentera la matrice M par un tableau à n lignes et p colonnes, en mettant l'élément $m_{i,j}$ à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne...
- L'ensemble des matrices de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Lorsque $n=p$, on notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ plutôt que $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.
- On munit naturellement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une structure d'espace vectoriel, avec les lois naturelles suivantes : $(\lambda M+N)_{i,j}=\lambda m_{i,j}+n_{i,j}$.

Exemples 1

- *La matrice* $M=\begin{pmatrix}1&0&1515\\-2&15&12\end{pmatrix}$ *est dans* $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, *avec* $m_{2,1}=-2$.
- *Si de plus* $N=\begin{pmatrix}2&-10&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$, *alors* $2M+N=\begin{pmatrix}4&-10&3031\\-3&29&24\end{pmatrix}$.
- *On parle de* matrice-ligne *lorsque* $n=1$ *: on ne confondra pas la matrice ligne* $\begin{pmatrix}1&0&-1789\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ *et le vecteur de* $\mathbb{R}^3$ $u=(1,0,-1789)$.
- *On définit de même les* matrices-colonnes *($p=1$). La matrice colonne* $\begin{pmatrix}1\\0\\-1789\end{pmatrix}$ *sera dite (dans quelques paragraphes) associée au vecteur u précédent dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

Définition 2

On fixe n et p des entiers >0. Les *matrices élémentaires* de type (n,p) sont les matrices $E_{k,l}$, pour $(k,l)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, avec $E_{k,l}$ de terme général $(E_{k,l})_{i,j}=\delta_{i,k}\delta_{j,l}$ (on rappelle la signification du *symbole de Kronecker* : $\delta_{\alpha,\beta}=1$ si $\alpha=\beta$, et 0 sinon). En termes clairs, $E_{k,l}$ est constituée uniquement de 0, sauf en position (k,l) où on trouve 1.

Exemple 2 *Si $n=3$ et $p=2$, on a* $E_{2,2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$

Proposition 1 *La famille des $E_{k,l}$, pour $(k,l)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, constitue une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

Preuve : On commence par observer que le coefficient (k,l) de la combinaison linéaire $\displaystyle\sum_{i,j}\lambda_{i,j}E_{i,j}$ est $\lambda_{k,l}$. Or deux matrices sont égales si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux. On a donc $M=\displaystyle\sum_{i,j}\lambda_{i,j}E_{i,j}$ si et seulement si pour tout $(k,l)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, $\lambda_{k,l}=m_{k,l}$: on obtient ainsi existence et unicité de la décomposition de M selon les $E_{i,j}$. ■

Corollaire 1 *$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension np*

Remarque 1 Tiens, comme $\mathcal{L}(E,F)$ lorsque $\dim E=p$ et $\dim F=n$...

[1] on dit parfois "entrées", ce qui est un anglicisme notoire : les anglo-saxons (et Maple) désignent les coefficients d'une matrice par *entries*

1.2 Lien avec les applications linéaires

DÉFINITION 3
Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Chaque $u(e_j)$ est combinaison linéaire des f_i. Si on note $m_{i,j}$ les coefficients tels que $u(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} f_i$, alors la matrice M de terme général $m_{i,j}$ s'appelle *la matrice représentant u entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$*.
Cette matrice est notée $\operatorname*{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} u$. Lorsque $F = E$ et $\mathcal{F} = \mathcal{E}$, on note $\operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}} u$ plutôt que $\operatorname*{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}} u$.

EXEMPLE 3 *La matrice représentant $(x, y) \mapsto (x+2y, y, 3x-y)$ entre les bases canoniques respectives (e_1, e_2) et (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Par contre, si on prend comme base au départ la famille $(e_1 + e_2, e_2)$ (en conservant la même base à l'arivée), la matrice représentant u entre ces deux base est : $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (sur la première colonne, on écrit les coefficients dans la décomposition de $u(e_1 + e_2)$ selon les f_i...).*

PROPOSITION 2 *On suppose E de dimension p et F de dimension n. Si on fixe une base $\mathcal{E}$ de E et une base $\mathcal{F}$ de F, alors l'application*

$$\Phi \left\| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} u \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

PREUVE : On commencera par montrer soigneusement la linéarité. Ensuite, vu l'égalité des dimensions, il suffit de montrer l'injectivité. Supposons donc $\Phi(u) = 0$: on a alors pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ $u(e_j) = 0$. u est donc nulle sur une base, donc est nulle.
Sans l'argument de dimension, on pourra prouver la surjectivité en fixant $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et en établissant l'existence de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $M = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} u$. On utilisera un fait prouvé dans le chapitre précédent (pour déterminer la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$, justement ; ce n'est pas un hasard...) : si on se fixe p vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ de F, on peut trouver une (unique) application u qui envoie chaque e_j sur v_j. ■

REMARQUE 2 BIEN ENTENDU, on aura noté les dimensions de E et F, qui sont respectivement p et n, et pas le contraire...

EXERCICE 1 *(IMPORTANT)*
Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer $\operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}}(u \circ v)$ en fonction de $A = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}} u$ et $B = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}} v$.

SOLUTION : On trouvera :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{pmatrix}$$

En fait, on va définir la multiplication des matrices à l'aide de la composée des applications linéaires. Un point de vue adopté parfois consiste à définir la multiplication à l'aide de "formules magiques", et de constater, miracle, que cela correspond à la composition d'applications linéaires.

DÉFINITION 4
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. D'après la proposition 2, il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ telle que A soit sa matrice *entre les bases canoniques* de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$: cette application linéaire est dite *canoniquement associée à A*, et on note souvent cela : $A \longleftrightarrow u$.

Exemple 4 *L'application canoniquement associée à I_n est la fonction identité de $\mathbb{K}^n$.*

Exemple 5 *L'application canoniquement associée à* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ *est :*

$$u : \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-2z, 2x+y-3z) \end{array} \right.$$

Définition 5
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Notons $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$ leurs applications linéaires canoniquement associées. On définit alors la matrice AB comme la matrice représentant $u \circ v$ (qui va de $\mathbb{K}^q$ dans $\mathbb{K}^n$) entre les bases canoniques de $\mathbb{K}^q$ et $\mathbb{K}^n$.

Remarque 3 Avec les notations précédentes, on a alors $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$: noter comment les dimensions s'arrangent "à la Chasles".

Proposition 3
- *Le produit matriciel $(A,B) \mapsto AB$ est bilinéaire (i.e. : linéaire par rapport à A et à B).*
- *Le produit matriciel est associatif : si les dimensions sont compatibles[2], on a : $A(BC) = (AB)C$.*
- *Le terme (i,j) du produit AB vaut :*

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}. \qquad (P)$$

Preuve :
- Considérer les applications linéaires canoniquement associées (entre les $\mathbb{K}^r$ adéquats...), et utiliser la linéarité de l'isomorphisme $u \mapsto \underset{\mathcal{E},\mathcal{G}}{\mathrm{Mat}}\, u$...
- Même principe.
- Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$ canoniquement associées à A et B.

$$\mathbb{K}^q \xrightarrow{v} \mathbb{K}^p \xrightarrow{u} \mathbb{K}^n$$

Si on note $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ les bases respectives de $\mathbb{K}^q$, $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, on a par définition $AB = \underset{\mathcal{E},\mathcal{G}}{\mathrm{Mat}}(u \circ v)$, de sorte que si $j \in [\![1,q]\!]$ et $C = AB$, on a :

$$(u \circ v)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j} g_i.$$

Or :

$$\begin{array}{rcl} (u \circ v)(e_j) & = & u\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{p} b_{k,j} f_j\Big) = \sum_{k=1}^{p} b_{k,j} u(f_k) = \sum_{k=1}^{p} \Big(b_{k,j} \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} g_i\Big) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{k} a_{i,k} b_{k,j}\Big) g_i, \end{array}$$

et on conclut par liberté des g_i.

■

Remarque 4 La formule (P) du produit incite à présenter le calcul de $C = AB$ sous la forme $\begin{array}{cc} & (B) \\ (A) & (C) \end{array}$: on calcule ainsi $c_{i,j}$ en "prenant le produit scalaire de la ligne de A

[2]Si elles le sont dans un membre, elles le sont dans l'autre : le vérifier...

et de la colonne de B dont $c_{i,j}$ est l'intersection". Cela donne, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1.3 L'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On rappelle que pour $n > 0$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'espace $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ des matrices (n, n) (de même que $\mathcal{L}(E)$ est un raccourci pour $\mathcal{L}(E, E)$).

Proposition 4 *$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (muni des lois auxquelles on pense) est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative (sauf pour $n = 1\ldots$), de neutre (pour la multiplication) :*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}.$$

Preuve : On commence par vérifier (soit par le calcul, soit en revenant à la définition du produit matriciel) : $MI_n = I_nM = M$. Ensuite, pour montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est JAMAIS commutative lorsque $n \geq 2$ (ce qui ne signifie pas que deux matrices ne commutent jamais) : on peut prendre par exemple $A = E_{1,2}$ et $B = E_{2,1}$: $AB = E_{1,1}$ alors que $BA = E_{2,2}$ (justifier). ■

Certaines matrices ont une structure remarquable :

Définition 6
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite

- *triangulaire supérieur* (resp. *inférieur*) lorsque $a_{i,j} = 0$ pour tout couple (i, j) tel que $i > j$ (resp. $i < j$) ;
- *diagonale* lorsque $a_{i,j} = 0$ pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$ (ce qui revient à dire que A est triangulaire inférieur et supérieur).

Il est parfois utile de savoir multiplier "formellement" (i.e. sans réfléchir) les matrices élémentaires. On peut alors retenir le résultat suivant :

Proposition 5 *$E_{i,j}E_{k,l}$ est nul lorsque $j \neq k$, et vaut $E_{i,l}$ lorsque $j = k$. En d'autres termes :*

$$E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}.$$

Preuve : On peut le faire de façon calculatoire (avec les formules de produits), ou bien en considérant les applications linéaires canoniquement associées, sachant que celle canoniquement associée à $E_{i,j}$ envoie e_j sur e_i, et les e_α $(\alpha \neq j)$ sur 0. ■

Définition 7
Le produit matriciel est une LCI associative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qui possède un neutre, à savoir I_n. L'ensemble des éléments inversibles est noté $GL_n(\mathbb{K})$. Muni du produit matriciel, il constitue un groupe : "groupe linéaire des matrices carrées d'ordre n".

Exemple 6 *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *est inversible, d'inverse* $-A$*. En revanche, la matrice* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *n'est pas inversible : pourquoi ?*

Remarque 5 $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre ($AB = 0$ n'implique pas : A ou B est nulle). On fournira un contre-exemple.

Exercice 2 *Soit* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$*. Montrer qu'il existe deux scalaires* λ *et* μ *tels que* $A^2 = \lambda A + \mu I_2$*.*

Exercice 3 *Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieur (resp. diagonales) est une matrice triangulaire supérieur (resp. diagonale) dont on donnera les éléments diagonaux.*

1.4 Transposition

Définition 8
Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice transposée de M, notée ${}^tM$ ou M^T, désigne la matrice $N \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \qquad N_{i,j} = M_{j,i}.$$

Exemple 7 ${}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$*. De même,* ${}^tE_{i,j} = E_{j,i}$*.*

On montrera sans mal (par exemple en décomposant les matrices avec les $E_{i,j}$) les résultats suivants :

Proposition 6
- *$M \mapsto {}^tM$ réalise un isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.*
- *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.*
- *Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors ${}^t({}^tM) = M$.*

Définition 9
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *symétrique* (resp. *antisymétrique*) lorsque $A_{i,j} = A_{j,i}$ (resp. $A_{i,j} = -A_{j,i}$) pour tout i, j.
L'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$).

Proposition 7 *$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Preuve : On pourra montrer que toute matrice se décompose de façon unique comme somme d'une matrice symétrique, et d'une matrice antisymétrique. Pour cela, chercher la forme nécessaire de la décomposition, puis vérifier qu'elle convient.
Un autre point de vue consiste à partir du fait que la transposition T est une involution linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc une symétrie. $\operatorname{Ker}(T - \mathrm{Id})$ et $\operatorname{Ker}(T + \mathrm{Id})$ sont donc supplémentaires. ■

Exercice 4 *Montrer que les dimensions de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont respectivement $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)}{2}$.*
On exhibera des bases simples de ces deux espaces.

2 Représentation des applications linéaires

Dans cette partie, on va voir que la matrice d'une application linéaire permet de *calculer* au sens littéral les images. Appliquer ou composer des applications linéaires reviendra maintenant à multiplier des matrices.
Comme les applications linéaires sont parfois définies de façon naturelle dans des bases non adaptées aux problèmes, il faudra également être capable de *changer de base*, c'est-à-dire calculer des matrices entre deux nouvelles bases, à partir de la matrice dans deux anciennes bases, ainsi que des "matrices de passage" entre ces bases.

2.1 Matrices coordonnées

DÉFINITION 10
Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. La *matrice coordonnées de $x \in E$ dans la base $\mathcal{B}$* est la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, où $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ est l'unique décomposition de x dans $\mathcal{B}$. On notera parfois : $x \overset{\mathcal{B}}{\longleftrightarrow} X$, ou encore : $X = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} x$.

EXEMPLE 8 *Si $E = \mathbb{R}^3$, $x = (1, 1515, -2)$ avec $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique, et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$, où $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_2 + e_3$, et $f_3 = e_1 + e_3$ (vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de E) :*

$$x \overset{\mathcal{B}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ 1515 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \textit{mais} \quad x \overset{\mathcal{B}'}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 759 \\ 756 \\ -758 \end{pmatrix}.$$

Le fait suivant "recolle les morceaux" de façon naturelle entre vecteurs, applications linéaires, matrices d'AL et matrices coordonnées :

PROPOSITION 8 *Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, e et f deux bases de E et F.
Si $U = \operatorname{Mat}_{e,f} u$, $x \overset{e}{\longleftrightarrow} X$ et $y \overset{f}{\longleftrightarrow} Y$, alors : $Y = UX$.*

PREUVE : Notons p et n les dimensions de E et F, et $U = ((u_{i,j}))$: $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$, donc :

$$y = u(x) = \sum_{j=1}^{p} x_i \Big(\sum_{i=1}^{n} u_{i,j} f_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{p} u_{i,j} x_i \Big) f_i,$$

donc le i-ème terme de la matrice coordonnée Y est $\sum_{j=1}^{p} u_{i,j} x_i$, ce qui est également le i-ème terme de la matrice colonne UX. ■

On sait déjà que la matrice UV est par définition canoniquement associée à $u \circ v$, où u et v sont canoniquement associées à U et V. A partir du résultat précédent, on va pouvoir généraliser ce fait à toutes applications linéaires associées à U et V, entre des bases "compatibles" :

COROLLAIRE 2 *Soient E, F, G trois espaces de dimensions finies munis de trois bases e, f, g, ainsi que $v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in \mathcal{L}(F, G)$.*

$$(E, e) \xrightarrow[V]{v} (F, f) \xrightarrow[U]{u} (G, g)$$

Si $U = \operatorname{Mat}_{f,g} u$ et $V = \operatorname{Mat}_{e,f} v$, alors $UV = \operatorname{Mat}_{e,g} u \circ v$.

Preuve : Soit $x \in E$. On définit $y = v(x)$, $z = u(y) = (u \circ v)(x)$, $x \overset{e}{\longleftrightarrow} X$, $y \overset{e}{\longleftrightarrow} Y$, $z \overset{e}{\longleftrightarrow} Z$, ainsi que $W = \operatorname*{Mat}_{e,g} u \circ v$.

La proposition précédente permet d'affirmer : $Y = VX$, $Z = UY$, et $Z = WX$. On a donc : $(UV)X = WX$, soit encore $(UV - W)X = 0$ (matrice colonne). Si on note $D = UV - W$ et on prend $x = e_k$, DX vaut alors la k-ème colonne de D. Ainsi, D a toutes ses colonnes nulles, donc est nulle. ■

2.2 Matrice de passage entre deux bases

Exercice 5 *$E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2)$ (base canonique) et $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2)$, avec $f_1 = e_1 + e_2$ et $f_2 = -e_1 + e_2$.*

- *Montrer que $\mathcal{B}_2$ est une base de E.*
- *Quelles sont les coordonnées de $(2,3)$ dans $\mathcal{B}_1$? Et dans $\mathcal{B}_2$? Recommencer avec $(-3,4)$, puis (x,y).*
- *Quelles sont les coordonnées de $2f_1 + 3f_2$ dans $\mathcal{B}_2$? Et dans $\mathcal{B}_1$? Recommencer avec $-3f_1 + 4f_2$, puis $xf_1 + yf_2$.*

Définition 11

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E

- Considérons p vecteurs $x_1, ..., x_p \in E$. La matrice représentant la famille $x_1, ..., x_p$ dans $\mathcal{B}$ est la matrice (n,p) dont la k-ème colonne est la matrice coordonnée de x_k dans $\mathcal{B}$. Elle est notée $\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_p)$.
- Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ une autre base de E. La *matrice de passage* entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice représentant $(e'_1, ..., e'_n)$ dans $\mathcal{B}$. Elle est notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, ..., e'_n) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} e'_1 & \cdots & e'_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

Remarques 6

- La matrice de la fonction identité de E (muni de $\mathcal{B}'$) dans E (muni de $\mathcal{B}$) est la matrice représentant les $u(e'_i) = e'_i$ dans $\mathcal{B}$, et donc :

$$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, ..., e'_n) = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \mathrm{Id} \quad : \quad (E, \mathcal{B}') \xrightarrow[P]{Id} (E, \mathcal{B}).$$

- $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible, d'inverse $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$. En effet, $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ représente la matrice de l'application identité entre E muni de $\mathcal{B}$ et E muni de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire I_n. Même chose pour $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Proposition 9 *Soit $x \in E$, de coordonnées respectives X et X' dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, alors $X = PX'$.*

Preuve : Considérons u l'application identité de E ("moralement : muni de $\mathcal{B}'$") vers E ("muni de $\mathcal{B}$"). Sa matrice entre ces deux bases est P, donc les coordonnées de $u(x)$ dans $\mathcal{B}$ sont PX', puisque X' est la matrice coordonnée de x dans $\mathcal{B}'$. Par ailleurs, $u(x) = x$ a pour coordonnées X dans $\mathcal{B}$... ■

Remarque 7 Chacun aura remarqué que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ permet de passer directement des coordonnées ... dans $\mathcal{B}'$ vers celles dans $\mathcal{B}$. Chacun est libre de considérer cette convention mauvaise, et de redéfinir ses propres matrices de passages, ainsi que toutes les autres définitions et formules associées. Néanmoins, pour tout ce qui concerne les communications avec le monde extérieur (son éminent professeur, mais aussi les colleurs et correcteurs de concours), on sera prié d'utiliser les conventions fournies dans ce poly...

Exercice 6 *Reprendre l'exercice 5 avec ce qu'on sait maintenant... c'est-à-dire en calculant les matrices de passages entre $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.*

2.3 Formule de changement de base pour une application linéaire

Proposition 10 *Soient E et F deux espaces vectoriels. E est muni de deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$, alors que F est muni des bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}'_2$. On note P (resp. Q) la matrice de passage entre $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ (resp. $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}'_2$).*
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que $M = \underset{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}{\mathrm{Mat}}\, u$ et $M' = \underset{\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}'_2}{\mathrm{Mat}}\, u$. Alors :

$$M' = Q^{-1}MP.$$

Preuve : La formule précédente et sa preuve sont fondamentalement expliquées par le diagramme[3] suivant, sur lequel il convient de méditer :

$$\begin{tikzcd}
E,\mathcal{B}_1 \arrow[r, "u", "M"'] & F,\mathcal{B}_2 \arrow[d, "Id_F"', "Q^{-1}"] \\
E,\mathcal{B}'_1 \arrow[u, "Id_E", "P"'] \arrow[r, "u", "M'"'] & F,\mathcal{B}'_2
\end{tikzcd}$$

Il suffit en effet d'appliquer la formule donnant la matrice d'une composée aux applications Id_E, u et Id_F... ■

Corollaire 3 Cas des endomorphismes

$$\begin{tikzcd}
E,\mathcal{B}_1 \arrow[r, "u", "M"'] & E,\mathcal{B}_1 \arrow[d, "Id_E"', "P^{-1}"] \\
E,\mathcal{B}'_1 \arrow[u, "Id_E", "P"'] \arrow[r, "u", "M'"'] & E,\mathcal{B}'_1
\end{tikzcd}$$

Si $F = E$, avec $M = \underset{\mathcal{B}_1}{\mathrm{Mat}}\, u$ et $M' = \underset{\mathcal{B}'_1}{\mathrm{Mat}}\, u$, la formule précédente devient :

$$M' = P^{-1}MP.$$

Exemples 9

- *Soit $E = \mathbb{R}^2$. On cherche la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de la projection p sur $\mathbb{R}f_1$ parallèlement à $\mathbb{R}f_2$, avec $f_1 = (1,1)$ et $f_2 = (-1,1)$. La matrice B de p dans $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ vaut $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notons P la matrice de passage de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{B}$:*

$$B = \underset{f_1,f_2}{\mathrm{Mat}}(e_1,e_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \underset{e_1,e_2}{\mathrm{Mat}}(f_1,f_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  On peut donc appliquer la formule de changement de base, après avoir fait le diagramme maintenant "usuel" :

$$\begin{tikzcd}
E,\mathcal{F} \arrow[r, "p", "B"'] & E,\mathcal{F} \arrow[d, "Id_E"', "P^{-1}"] \\
E,\mathcal{B} \arrow[u, "Id_E", "P"'] \arrow[r, "u", "A"'] & E,\mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

$$A = P^{-1}BP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  On vérifie que $A^2 = A$, ce qui était attendu ; pourquoi ?

- *En remplaçant B par $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on obtient la matrice S dans $\mathcal{B}$ de la symétrie par rapport à $\mathbb{R}f_1$ parallèlement à $\mathbb{R}f_2$:*

$$S = P^{-1}CP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Que peut-on vérifier ?

[3]Pour les disciples de Knuth, la réponse à leur question est : `\usepackage[]{amscd}`

2.4 Compléments sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

DÉFINITION 12
La *trace* d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est par définition la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

PROPOSITION 11 *Si* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, alors* $\text{tr } AB = \text{tr } BA$.

PREUVE : Les deux membres sont égaux à $\displaystyle\sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j} b_{j,i}$. ■

COROLLAIRE 4 Trace d'un endomorphisme
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$*. Les matrices rerésentant* u *dans les diverses bases de* E *ont toutes même trace. Cette trace commune est appelée trace de* u*, et notée* $\text{tr } u$.

PREUVE : Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux bases de E, M la matrice de passage de la première vers la seconde, et soient enfin M et M' les matrices de u dans ces deux bases. On a alors :

$$\text{tr } M' = \text{tr } P^{-1}MP = \text{tr } (P^{-1}M)P = \text{tr } P(P^{-1}M) = \text{tr } (P^{-1}P)M = \text{tr } M.$$

■

On rappelle que $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices (n, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ et inversibles. Comme dans tout anneau, on sait que l'ensemble des inversibles muni de la multiplication $(\text{GL}_n(\mathbb{K}), .)$ est un groupe.

PROPOSITION 12 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E, F)$ *de matrice* U *entre deux bases données* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{F}$*. Alors* u *est un isomorphisme si et seulement si* M *est inversible.*

PREUVE :
- Si u est un isomorphisme : notons v l'isomorphisme réciproque ($v = u^{-1}$) et $V = \underset{\mathcal{F},\mathcal{E}}{\text{Mat}}\, v$: les relations $u \circ v = \text{Id}_F$ et $v \circ u = \text{Id}_E$ permettent d'assurer les relations $UV = VU = I_n$.
- Réciproquement, si U est inversible, définissons v l'unique application linéaire de F dans E dont la matrice entre les bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$ est U^{-1}. On a alors $\underset{\mathcal{F}}{\text{Mat}}\, u \circ v = U.U^{-1} = I_n$, donc $u \circ v = \text{Id}_F$. De même, $v \circ u = \text{Id}_E$, et u est bijective (de bijection réciproque v).

■

REMARQUE 8 Si $A, B \in \mathcal{M}_n(C)$ et $AB = I_n$, les applications u et v canoniquement associée à A et B vérifient $u \circ v = \text{Id}_E$ ($E = \mathbb{K}^n$). v est donc injective, puis bijective (dimension), donc c'est un isomorphisme de réciproque u. Mais alors, $BA = I_n$, donc B et A sont inversibles, et inverses l'une de l'autre.

Le résultat suivant n'est pas bien difficile à montrer, si on suit les définitions. La raison profonde est en fait bien plus subtile, puisqu'elle nécessite de comprendre la véritable nature de la transposition... ce qui est largement exclu de notre programme.

PROPOSITION 13 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est inversible si et seulement si* ${}^t\!A$ *l'est.*

PREUVE :
- Si A est inversible, on a $A.A^{-1} = I_n$, donc en transposant : ${}^t(A^{-1}) . {}^t\!A = {}^tI_n = I_n$. De même, en partant de $A^{-1}.A = I_n$, on obtient ${}^t\!A . {}^t(A^{-1}) = I_n$, donc ${}^t\!A$ est inversible, d'inverse ${}^t(A^{-1})$.
- Réciproquement, si ${}^t\!A$ est inversible, le travail précédent assure que ${}^t({}^t\!A)$ (c'est-à-dire A) est inversible : gagné !

■

On termine par un exercice, qui est un préliminaire à la fois au paragraphe suivant et au chapitre suivant sur les systèmes linéaires (même si ça ne saute pas aux yeux...)

EXERCICE 7 *Soit $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $a_{i,i} \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.*

SOLUTION : On raisonnera géométriquement, on étudiant particulièrement les sous-espaces $F_k = u\big(\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k)\big)$.

3 Théorie du rang

3.1 Opérations élémentaires

On va s'intéresser dans ce chapitre à quatre types d'opérations sur une matrice donnée : l'échange de deux lignes (resp. colonnes), et le remplacement d'une ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$, où L_j est une autre ligne (même chose avec les colonnes). Ces types d'opérations sont habituelles lors de la résolution de systèmes linéaires, et la proposition suivante les interprète comme des produits par des matrices simples.

PROPOSITION 14 *Pour $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit les matrices carrées (n, n) : $S_{i,j}^n = I_n + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j}$ et $T_{i,j}^n = I_n + \lambda E_{i,j}$ (faire un dessin !). Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:*
- *Si on échange les lignes (resp. colonnes) i et j de M, on obtient la matrice $S_{i,j}^n M$ (resp. $MS_{i,j}^p$) ;*
- *si on remplace la ligne L_i (resp colonne C_i) de M par $L_i + \lambda L_j$ (resp. $C_i + \lambda C_j$), on obtient la matrice $T_{i,j}^n(\lambda)M$ (resp. $MT_{i,j}^p(\lambda)$).*

PREUVE : Pour retrouver les résultats comme pour les prouver (il est illusoire d'essayer de les apprendre), il faut faire des dessins avec i et j "très différents" pour y voir quelque chose. ■

REMARQUES 9
- On vérifie sans mal (par le calcul et/ou par l'interprétation en terme d'opérations élémentaires) que $S_{i,j}$ est inversible, d'inverse elle-même, et que $T_{i,j}(\lambda)$ est inversible d'inverse $T_{i,j}(-\lambda)$. La véritable raison vient de la réversibilité des opérations élémentaires usuelles et de la nature des opérations "réciproques".
- On s'autorise parfois à multiplier une ligne ou une colonne par une constante λ NON NULLE. Cela revient à multiplier la matrice à droite ou à gauche par $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$. Il s'agit à nouveau d'une opération réversible (faire la même opération avec $\dfrac{1}{\lambda}$ redonne la matrice initiale). Grâce à cette nouvelle opération, on peut également faire des opérations de la forme $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$, lorsque $\lambda \neq 0$ et $i \neq j$.

3.2 Rang d'une matrice, pivot de Gauss

DÉFINITION 13
Le rang d'une matrice A, noté rg A, est le rang de l'application linéaire canoniquement associée à A, c'est-à-dire (rappel...) la dimension de son image.

REMARQUE 10 L'application linéaire en question va de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$. Son image est donc de dimension $\leq n$. Mais le théorème du rang nous dit que ce rang est aussi $\leq p$: pourquoi ?

EXEMPLE 10 *Notons $J_r^{(n,p)}$ (ou bien, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté : J_r) la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont toutes les entrées sont nulles sauf les $J_{i,i}$ pour $i \in [\![1, r]\!]$ (dessin...). l'AL canoniquement associée à J_r va de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, et a pour image l'espace engendré par les r premiers vecteurs de bases de $\mathbb{K}^n$: son rang est donc r*

Exercice 8 *IMPORTANTISSIME*
Soient $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $Q \in GL_p(\mathbb{K})$, et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que A et PAQ ont le même rang.

Remarque 11 D'après l'exercice et l'exemple précédent, le rang de PJ_rQ vaut r : nous en reparlerons bientôt...

Les résultats de la proposition suivante relient les rangs de matrices à ceux des familles de vecteurs ou des applications dans n'importe quelle bases (et pas seulement celles canoniquement associées à une matrices).

Proposition 15

- *Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, avec E et F munis de bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, alors le rang de u est également celui de $U = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} u$.*
- *Si $x_1, ..., x_p$ sont des vecteurs de E de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}$, alors le rang de $(x_1, ..., x_p)$ est également le rang de $\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_p)$.*

Preuve :

- Il semble naturel de faire intervenir l'AL v canoniquement associée à U. Cette application va de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ (avec $p = \dim E$ et $n = \dim F$). Pour relier les différents espaces, on dispose des deux isomorphismes :

$$\varphi_1 \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, ..., \lambda_p) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_i \end{array} \right.$$

et

$$\varphi_2 \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & F \\ (\lambda_1, ..., \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \end{array} \right.$$

avec $\mathcal{B}_1 = (x_1, ..., x_p)$ et $\mathcal{B}_2 = (y_1, ..., y_n)$. Pour résumer :

$$\begin{array}{ccc} E, \mathcal{B}_1 & \xrightarrow[U]{u} & F, \mathcal{B}_2 \\ {\scriptstyle\varphi_1}\uparrow & & {\scriptstyle\varphi_2}\uparrow \\ \mathbb{K}^p, \mathcal{E} & \xrightarrow[U]{v} & \mathbb{K}^n, \mathcal{F} \end{array}$$

On va montrer que “le diagramme est commutatif”, c'est-à-dire le

Lemme 1 $u \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ v$.

Preuve : Les applications en jeu vont de $\mathbb{K}^p$ dans F. On va considérer l'image des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^p$. On montre sans mal que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$:

$$(u \circ \varphi_1)(e_j) = u(x_j) = \sum_{k=1}^{n} u_{k,j} y_j = \varphi_2\Big(\sum_{k=1}^{n} u_{k,j} f_j\Big) = (\varphi_2 \circ v)(e_j).$$

■

Fin de la preuve : Puisque le rang des AL est maintenu par composition avec des isomorphismes, on peut écrire :

$$\text{rg } u = \text{rg } u \circ \varphi_1 = \text{rg } \varphi_2 \circ v = \text{rg } v = \text{rg}\, U$$

(la dernière égalité venant la définition du rang de U).

- Le rang de $(x_1, ..., x_p)$ est la dimension de $\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_p)$, qui est l'image de l'application

$$\varphi \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, ..., \lambda_p) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_i \end{array} \right.$$

Il reste à écrire en utilisant le résultat précédent et en notant $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$:

$$\mathrm{rg}(x_1, ..., x_p) = \mathrm{rg}\ \varphi = \mathrm{rg} \underset{\mathcal{E},\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\, \varphi = \mathrm{rg} \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(x_1, ..., x_p).$$

■

Le résultat suivant est à connaître AVEC SA PREUVE : il s'exprime de façon matricielle, mais fondamentalement, il dit que toute application linéaire se représente TRES SIMPLEMENT, pour peu qu'on prenne une bonne base au départ et à l'arrivée.

Théorème 1 Réduction du rang
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r, alors il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = QJ_rP$.

Preuve : Considérons l'application $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A : $A = \underset{\mathcal{E},\mathcal{F}}{\mathrm{Mat}}\, u$, avec $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ les bases canoniques de $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$. On va construire de bonnes bases $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$ de E et F telles que la matrice de u entre ces bases soit J_r :

$$\underset{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}{\mathrm{Mat}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u(e'_1) \dots u(e'_r) & u(e'_{r+1}) \dots u(e'_p) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & 1 & & & \\ \hline & 0 & & & 0 & \\ & & & & & \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} f'_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f'_r \\ f'_{r+1} \\ \vdots \\ f'_n \end{array}$$

Il faut déjà prendre $e'_{r+1}, ..., e'_p$ dans le noyau de u. Mais ce noyau est de dimension $p - r$ (théorème du rang). On peut donc *effectivement* définir $(e'_{r+1}, ..., e'_p)$ comme une base du noyau de u. Complétons la alors en une base quelconque de E, avec des vecteurs $(e'_1, ..., e'_r)$. On est obligé de prendre $f'_1 = u(e'_1)$,..., $f'_r = u(e'_r)$. Comme la restriction de u à $\mathrm{Vect}(e'_1, ..., e'_r)$ est injective[4], on en déduit que $(f'_1, ..., f'_r)$ est libre. Il reste à la compléter en une base $(f'_1, ..., f'_n)$ de F, et on aura alors $\underset{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}{\mathrm{Mat}}\, u = J_r$.

$$\begin{tikzcd} E, \mathcal{E} \arrow[r, "u", "A"'] & F, \mathcal{F} \\ E, \mathcal{E}' \arrow[u, leftarrow, "Id_E"', "P_1"] \arrow[r, "u", "J_r"'] & F, \mathcal{F}' \arrow[u, "Id_F"', "P_2"] \end{tikzcd}$$

Dans le diagramme précédent, P_1 est la matrice de pasage de $\mathcal{E}'$ vers $\mathcal{E}$ et P_2 de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{F}'$. Le théorème de changement de base (en fait, le diagramme précédent...) nous permet d'affirmer : $A = P_2 J_r P_1$. Il reste à vérifier que $P_1 \in GL_p(\mathbb{K})$ et $P_2 \in GL_n(\mathbb{K})$, ce qui est le cas puisqu'il s'agit de matrices de passages dans E et F de dimensions p et n. ■

L'exo suivant se traite très facilement avec le théorème précédent. Les raisons géométriques profondes de ce résultat, ainsi que ces conséquences, sont néanmoins plus fines qu'il n'y paraît.

[4] pourquoi, au fait ?

Exercice 9 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer :* $\mathrm{rg}\ {}^tA = \mathrm{rg}\ A$.

Le résultat suivant nous indique que Maple va savoir calculer des rangs, ainsi que le taupin. Les opérations élémentaires dont il va être question sont celles décrites dans le premier paragraphe de cette partie. Lorsqu'une telle opération transforme A en B, on note $A \to B$, et on se souvient qu'alors $\mathrm{rg}\ A = \mathrm{rg}\ B$ (puisqu'on a multiplié à droite ou a gauche par une matrice inversible).

Définition 14 (Algorithme de Gauss)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'algorithme de Gauss appliqué à A consiste à effectuer une succession d'opérations élémentaires sur A décrites dans ce qui suit. D'un point de vue informatique, on dispose d'une variable A qui est changée à chaque étape. D'un point de vue mathématique, cela reviendrait à définir une suite de matrices $A_0, ..., A_N$, avec $A_0 = A$, A_N la matrice rendue, chaque A_{k+1} ($k \in [\![0, N-1]\!]$) étant obtenue par multiplication de A_k à droite ou à gauche par une matrice inversible.

$$A = A_0 \to A_1 \to \cdots A_k \to A_{k+1} \cdots \to A_N.$$

`A[i,j]`,`L[i]`,`C[i]` désignent respectivement l'élément (i,j) de A et ses i-èmes lignes et colonnes.

```
PIVOT_DE_GAUSS(A)

pivot <- 1;
Tant qu'il existe un élément non nul en position (i,j)
avec i>=pivot et j>=pivot
    1. Placer un tel élément en position (pivot,pivot),
       par échange éventuel de ligne/colonne;
    2. Pour k de pivot+1 jusqu'à n,
       remplacer L[k] par L[k]-A[k,pivot]/A[pivot,pivot]L[pivot]
    3. pivot <- pivot+1
Fin de Tant_que;

Retourner A.
```

Remarque 12 La boucle "Tant que" est effectuée au plus n fois car si jamais `pivot` atteint la valeur $n+1$, la condition de boucle risque de ne plus être vérifiée... On vient de prouver la *terminaison* de l'algorithme.

Proposition 16 *L'algorithme de Gauss aboutit à une matrice A_N de la forme (en blocs) :*

$$A_N = \begin{pmatrix} D & \vdots & B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{n-r,r} & \vdots & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix},$$

avec $D \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ diagonale à éléments diagonaux non nuls, et alors $r = \mathrm{rg}\ A$.

Preuve : La preuve de ce théorème pourra être admise... pour le cours de maths ; pas celui d'algorithmique ! Il s'agit en fait une preuve typique de validité d'algorithme comme on en voit en informatique, avec la notion clef d'*invariant* (penser à l'exponentiation rapide, version itérative).
Suposons que l'algorithme a effectué p passages dans la boucle, le $(p+1)$-ème test ayant été invalidé.
La propriété prouvée est la suivante : pour $k \in [\![1, p+1]\!]$, $P(k)$ "Avant le k-ème test de boucle, on a *pivot* $= k$, $A_{i,j} = 0$ pour tout (i,j) tel que $1 \leq j < k$ et $j < i \leq n$, et $A_{i,i} \neq 0$

pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$". Par exemple, $P(2)$ et $P(3)$ affirment qu'avant les 2-èmes et 3-èmes passages, A est de la forme (avec α et β et γ non nuls) :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \vdots & & (*) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & (*) \\ 0 & \vdots & & \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \beta & * & \vdots & & (*) \\ 0 & \gamma & \vdots & & (*) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & (*) \\ 0 & 0 & \vdots & & \end{pmatrix}$$

- Pour $P(1)$, il suffit de noter que $pivot = 1$, car il n'y a pas de j vérifiant $1 \leq j < 1$...
- Supposons $P(k)$ vérifiée pour un certain $k \in [\![1, p]\!]$. La phase 1 va placer un terme non nul en position (k, k), en conservant la propriété $P(k)$ (pourquoi ?). La phase 2 va placer un 0 en position (k, p) pour tout $k \in [\![p, n]\!]$, tout en préservant les autres 0 de la matrice. Comme en phase 3 on incrémente `pivot`, celui-ci vaudra bien $k+1$ au test suivant. Tout ceci établit $P(k+1)$.

Ainsi, le principe de récurrence nous permet d'affirmer que $P(k)$ est vérifié pour tout $k \in [\![1, p+1]\!]$. En particulier, au moment du $p+1$-ème test, on a $pivot = p+1$, donc :
- d'après $P(p+1)$, on a $a_{i,j} = 0$ lorsque $j \in [\![1, p]\!]$ et $j < i \leq n$.
- comme le test est invalidé, les $a_{i,j}$ sont tous nuls pour $i \geq p+1$ et $j \geq p+1$.

La matrice rendue a bien des 0 où il faut (avec $r = p$), et des éléments non nuls également où il faut !

Pour terminer, puisque les opérations élémentaires sur les lignes et colonnes conservent le rang, il reste à montrer que A_N est effectivement de rang r. Pour cela, on montre que l'application linéaire u canoniquement associée à A_N a pour image le sous-espace G de $F = \mathbb{R}^n$ engendré par les r premiers vecteurs de la base canonique de F. L'inclusion $\operatorname{Im} u \subset G$ est claire. Pour l'autre, on montre par récurrence :

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \qquad \operatorname{Vect}\big(u(e_1), ..., u(e_k)\big) = \operatorname{Vect}(f_1, ..., f_k)$$

(et tout cela fait furieusement penser à ces histoires de familes de polynômes échelonnés en degré, non ?) ∎

Remarque 13 En pratique, on s'autorise également les opérations consistant à transposer des matrices, ou faire disparaître une colonne ou une ligne constituée uniquement de 0. Ces opérations conservent le rang : pourquoi ?

Exemples 11
- *Rang de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

donc $\operatorname{rg} A = 2$ *:* A *est inversible.*
- *Rang de* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc $\operatorname{rg} B = 1$.
- *Rang de* $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$C \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

et donc $\operatorname{rg} C = 3$ *: C est inversible.*

- *Rang de* $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ *:*

$$D \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc $\operatorname{rg} D = 2$.

Exercice 10 *Déterminer le rang de la famille de vecteurs de* $\mathbb{R}^4$ (f_1, f_2, f_3, f_4)*, avec* $f_1 = (0, 1, -1, 2)$*,* $f_2 = (1, 1, 0, 1)$*,* $f_3 = (1, 1, -1, -1)$ *et* $f_4 = (3, 4, -3, 1)$.

3.3 Inversion des matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Supposons A inversible, et fixons $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. L'équation $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, est équivalente (pourquoi ?) à $X = A^{-1}Y$.
- Si A n'est pas inversible, l'application canoniquement associée ne sera ni injective ni surjective. Il existera donc d'une part des X non nuls tels que $AX = 0$, et d'autre part des Y tels que l'équation $AX = Y$ admette plusieurs solutions.

Pour inverser une matrice A, on va donc chercher à résoudre le système $AX = Y$ (en fixant préalablement Y). On va chercher à triangulariser le système, *ce qui revient à faire les mêmes opérations que lors du calcul du rang par pivot de Gauss* :

- Si A est inversible, on va arriver à un système équivalent triangulaire à éléments diagonaux non nuls, qu'on pourra résoudre "de haut en bas" par substitutions successives. On arrivera à une solution de la forme $X = BY$, avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a donc $(B - A^{-1})Y = 0$ pour tout Y. En raisonnant géométriquement ou en prenant Y une matrice colonne ne contenant que des 0 sauf un 1, on en déduit que $B = A^{-1}$, et c'est gagné.
- Si A n'est pas inversible, son rang r est $< n$. Comme les opérations effectuée pour résoudre le système sont les mêmes que pour déterminer le rang, on va arriver à un système où les premiers membres de $n - r$ équations seront nuls mais pas les seconds membres. A défaut d'avoir la matrice inverse, on aura trouvé le rang... Pour pas très cher, on aura même caractérisé les éléments de l'image, en regardant de plus près ces $n - r$ équations dégénérées... mais c'est une autre histoire.

Exemples 12

- *Pour la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$*, on trouve :*

$$AX = Y \iff \cdots \iff X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y,$$

donc A est inversible d'inverse $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- *Pour* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*, on trouve :*

$$BX = Y \iff \cdots \iff X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} Y,$$

donc B est inversible d'inverse $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- *Pour* $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$*, on trouve :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \cdots \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - y_1 \\ y_1 + y_3 \end{pmatrix},$$

système n'admettant pas de solution lorsque $(y_1, y_2, y_3) = (1, 0, 0)$*, et* C *n'est pas inversible. Plus précisément, son rang est 2 : pourquoi ?*

Exercice 11 *On reprend la matrice* B *des exemples précédents. On note* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- *Exprimer* B *en fonction de* M *et* I_3*.*
- *Calculer* M^2*. En déduire* B^2 *en fonction de* M *et* I_3*, puis de* B *et* I_3*.*
- *En déduire que* B *est inversible, et déterminer son inverse.*

Exercice 12 *Montrer que la matrice* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *est inversible si et seulement si* $ad - bc \neq 0$*.*

4 Annexe : puissances d'une matrice

4.1 Pourquoi et comment ?

Pourquoi veut-on calculer A^p, où A est une matrice (n, n) ?

- Pour étudier une suite définie par ses premiers termes, et une relation de récurrence linéaire. Par exemple, la suite de fibonacci est définie par ses premiers termes $f_0 = 0$ et $f_1 = 1$, puis la relation $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si on note $X_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, on vérifie sans mal :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X_n = AX_n,$$

  de sorte que $X_n = A^n X_0$ (récurrence immédiate). La connaissance de A^n permettra donc de calculer X_n donc f_n.
- Les itérées successives u^n d'un endomorphisme u ont pour matrice dans une base $\mathcal{B}$ donnée A^n, où $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u$. La connaissance de A^n peut alors donner des informations sur u^n.
- Les calculs de A^n interviendront dans bien des écrits et des oraux de concours, donc si on veut intégrer... Plus sérieusement, les calculs de A^n sont l'occasion de mettre en œuvre un certain nombre de techniques d'algèbre (binôme, polynômes, récurrences, etc...), et sont donc assez "filtrants".

Comment réaliser un tel calcul ?

- Prouver par récurrence une formule fournie, ou "intuitée" à l'aide des premiers termes.
- Utiliser la formule du binôme de Newton, après avoir décomposé A sous une forme $A_1 + A_2$, avec A_1 et A_2 qui commutent, et dont le calcul des puissances est aisé (souvent, l'une des deux est une matrice scalaire ou nilpotente...).
- Obtenir une "relation polynômiale simple" vérifiée par A, c'est-à-dire de la forme $P(A) = 0$, avec P un polynôme de degré le plus petit possible. Ensuite, effectuer la division euclidienne de X^n par P après avoir factorisé ce dernier.
- Obtenir une relation de la forme $A = PDP^{-1}$, où d est une matrice dont on peut facilement calculer les puissances (par exemple D diagonale...).

On donne un exemple pour les deux premières méthodes. Les deux dernières font l'objet des deux derniers paragraphes de ce chapitre.

Exemple 13 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *On constate que* $A^2 = A + 2I_3$*, puis on montre par récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3.$$

Exemple 14 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Posant* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*, on a* $A = M - I_3$*. Puisque* M *et* $-I_3$ *commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton, sachant que* $M^2 = 3M$*, puis par récurrence immédiate* $M^k = 3^{k-1}M$ *:*

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k M^k (-I_3)^{n-k} = (-1)^n I_3 + \Big(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k 3^{k-1} (-1)^{n-k} \Big) M,$$

que l'on simplifie grâce au binôme à nouveau, en réinjectant un terme dans la somme après avoir factorisé $\frac{1}{3}$ *:*

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k 3^{k-1} (-1)^{n-k} = \frac{1}{3}\big((3-1)^n - (-1)^n\big),$$

soit enfin :

$$A^n = (-1)^n I_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} M.$$

4.2 Utilisation d'un polynôme annulateur

Pour un polynôme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_d X^d$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on définit :

$$P(A) = \lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \cdots + \lambda_d A^d.$$

Si P est un polynôme tel que $P(A) = 0$, avec P de degré d (souvent $d \leq 3$), on effectue la division euclidienne de X^n par P : $X^n = Q_n P + R_n$, avec R de degré $< d$. On a alors $A^n = R_n(A)$.

Le tout est de savoir comment faire pour :

- trouver un polynôme annulateur P : il est en général donné ("quand vous serez grand", vous aurez un moyen pour le trouver : voir à ce sujet la feuille Maple des exercices, avec la mystérieuse fonction `charpoly`...) ;
- calculer le reste dans la division euclidienne (le quotient, on s'en fiche) : puisque R est de degré $\leq d - 1$, on a d inconnues. On cherche les racines de P. Si P admet d racines distinctes, on évalue les deux membres de la division euclidienne en chacune des racines, et on obtient un système qui admet une unique solution : on peut le prouver, mais dans un premier temps, on peut se contenter de le constater à chaque fois, "par miracle".
  Si P admet des racines multiples, on peut également dériver les membres de la division euclidienne, et évaluer en ces racines...

Exemple 15 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *On constate que* $A^2 - A - 2I_3 = 0$*. Posant* $P = X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1)$*, on effectue ensuite la division euclidienne* $X^n = Q_n P + \alpha_n X + \beta_n$*, avec* $2^n = 2\alpha_n + \beta_n$ *et* $(-1)^n = -\alpha_n + \beta_n$*, donc* $\alpha_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$ *et* $\beta_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$*, puis :*

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3.$$

4.3 Diagonalisation

On obtient par divers moyens (qui deviendront de plus en plus naturels) une relation de la forme $A = PDP^{-1}$, avec D diagonale (on dit qu'on a "diagonalisé" A). On montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ (récurrence, ou, mieux, interprétation de la formule comme une formule de changement de base). Il reste à noter que D^n se calcule facilement, et faire un produit de trois matrices pour obtenir A^n.

EXEMPLE 16 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *On constate (en fait, plus tard, on saura trouver* systématiquement *de telles relations) :*

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc en prenant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *:*

$$AP = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

soit encore $A = PDP^{-1}$*, avec* $D = Diag(-1, -1, 2)$*. On en déduit :*

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1},$$

et on laisse le lecteur terminer le calcul de P^{-1} *puis le produit des trois matrices.*

4.4 Pour terminer...

On mettra en œuvre les deux dernières méthodes pour calculer le terme général de la suite de Fibonacci. On trouvera (aux simplifications près) comme Maple :

```
>rsolve({f(n+2) = f(n+1) + f(n),f(0)=0, f(1)=1} , f(k));
```

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\Big)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(-\frac{2}{\sqrt{5}+1}\Big)^k$$