Décomposition des fractions rationnelles

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps : $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Il s'agit essentiellement d'un chapitre TECHNIQUE : le but du jeu est d'oublier la "technique d'identification" vue en terminale, pour appliquer des méthodes bien plus rapides.

Tous les exemples sont traités dans une feuille Maple jointe.

1 Généralités

1.1 Présentation de $\mathbb{C}(X)$

De même que $\mathbb{Q}$ existe parce que $\mathbb{Z}$ possède des éléments non inversibles, on peut construire un corps commutatif contenant $\mathbb{K}[X]$, dont tous les éléments non nuls sont inversibles, et dont tous les éléments s'écrivent (de façon non unique, comme pour les rationnels) $\dfrac{P}{Q}$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Ce corps est noté $\mathbb{K}(X)$: "corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$".
Il faut comprendre que les fractions $\dfrac{X}{X(1+X)}$ et $\dfrac{1}{1+X}$ SONT EGALES, et pas seulement les jours de beau temps (condition non grotesque[1] mais pas toujours vérifiée), ou bien lorsque $X \neq -1$ (condition exacte et grotesque bien que (en fait, *car*) toujours vérifiée...).
On admet que toute fraction F peut s'écrire sous la forme $\dfrac{P}{Q}$, où P et Q "sont premiers entre eux" (on note $P \wedge Q = 1$), c'est-à-dire : il n'existe pas de polynôme non constant A tel que A divise P et Q. Il y a même unicité si on impose à Q d'être unitaire. On parle de forme irréductible.
Notons que si $P \wedge Q = 1$, alors P et Q n'ont pas de racine commune : pourquoi ?
Terminons par définir le degré d'une fraction $F = \dfrac{P}{Q} \neq 0$ par $\deg F = \deg P - \deg Q$, avec . Le lecteur chipotteur vérifiera que cette définition est cohérente... après s'être posé la question : qu'est-ce qui se passe si $F = \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$?

Exercice 1 *Que dire de* $\deg(F_1F_2)$ *et* $\deg(F_1 + F_2)$ *?*

1.2 Pôles, fonctions rationnelles

Définition 1
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. On écrit $F = \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$ avec $P_1 \wedge Q_1 = 1 = P_2 \wedge Q_2$. Alors Q_1 et Q_2 ont les mêmes (éventuelles) racines (le montrer ; en fait, Q_1 et Q_2 sont proportionnels, mais c'est une autre histoire...) : on le nomme les *pôles* de F.

Remarque 1 Plus précisément, on peut même montrer que les racines de Q_1 et Q_2 ont même multiplicité vis-à-vis de Q_1 et Q_2 : on peut alors parler de la *multiplicité* du pôle d'une fraction.

Si $F = \dfrac{P}{Q}$ est une fraction dont l'ensemble des pôles est $\mathcal{P}$, on définit de façon naturelle une application de $\mathbb{K} \setminus \mathcal{P}$ dans $\mathbb{K}$ par : $\widetilde{F}(x) = \dfrac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)}$.
De telles fonctions s'appellent les "*fonctions rationnelles*", ce qui étend la notion de fonction polynomiale.

[1] bien que ni nécessaire ni suffisante

1.3 Dérivation

Définition 2
On définit la *fraction dérivée* de $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, que l'on note F', par : $F' = \dfrac{P'Q - PQ'}{Q^2}\cdot$
Le lecteur vérifiera que si $F = \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$, la définition est bien cohérente.

Remarque 2 Lorsque $F \neq 0$, on a $\deg F' \leq \deg F - 1$ (lorsque $\deg F = 0$, on peut avoir $\deg F' \leq -2$: donner un exemple).

2 Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$

Exercice 2 *(Bac k, pour tout $k \in [\![1980, 2001]\!]$)*
Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \neq 2$:

$$\frac{x^2+1}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2}\cdot$$

2.1 Théorème de décomposition

Proposition 1 *Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ de pôles (x_1, α_1), (x_2, α_2), ..., (x_k, α_k). Alors il existe un unique polynôme E et des complexes $\lambda_{i,j}$ ($1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq \alpha_i$) tels que :*

$$F = E + \sum_{i=1}^{k}\Big(\frac{\lambda_{i,1}}{X-x_i} + \frac{\lambda_{i,2}}{(X-x_i)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{i,\alpha_i}}{(X-x_i)^{\alpha_i}}\Big) = E + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{\lambda_{i,j}}{(X-x_i)^j}\cdot$$

Preuve : L'existence de E s'obtient par division euclidienne de P par Q, où $F = \dfrac{P}{Q}$, et l'unicité vient facilement avec des considérations de degré. Au passage, on note que si $E \neq 0$, son degré est celui de F.
Pour le reste, on peut raisonner par récurrence sur le nombre de pôles et, pour un pôle donné, "faire descendre l'ordre de multiplicité" en multipliant F par $X - x_i$. Ce n'est pas inaccessible, mais ce n'est pas fondamental non plus : on zappera... ■

Définition 3
Dans l'énoncé précédent, $\dfrac{\lambda_{i,1}}{X-x_1} + \cdots + \dfrac{\lambda_{i,\alpha_i}}{(X-x_i)^{\alpha_i}}$ est la *partie polaire* associée au pôle x_i, et E est la *partie entière* de F.

2.2 Pôles simples

Définition 4
Lorsque le pôle p de F est de multiplicité 1 (on parle de *pôle simple*), la partie polaire associée à p ne comporte qu'un terme $\dfrac{\lambda}{X-p}\cdot$ λ s'appelle le *résidu de F en p*.

Dans la suite, p est un pôle simple de $F \in \mathbb{C}(X)$. En terminale, pour calculer le résidu, on écrit $F = \dfrac{\lambda}{X-p} + \cdots$ on regroupe les différents termes sous même dénominateur, et on sort la formule magique (auquel on ne comprend rien) : "par identification, gnagnagna...".

CETTE METHODE DOIT ETRE DEFINITIVEMENT OUBLIEE.

En effet, les identifications mélangent joyeusement les questions de forme NECESSAIRE et de forme SUFFISANTE pour les coefficients : on ne peut reparler d'identifications que lorsqu'on a bien compris ces points.
La première technique s'applique dans le cas où le dénominateur est factorisé.

Proposition 2 *Supposons que* $F = E + \frac{P}{Q} = E + \frac{P}{(X-p)Q_1}$, *alors le résidu de* F *en* p *vaut* $\frac{P(p)}{Q_1(p)}$.

Preuve : Après multiplication par $X-p$, on obtient

$$\lambda + R = \frac{P}{Q_1} + (X-p)E,$$

où R admet p comme racine, et $\frac{P}{Q_1}$ n'admet p ni comme racine ni comme pôle : on peut donc évaluer ces deux fractions en p... ■

Exercice 3 *Reprendre l'exercice 3 : on peut obtenir* a *en considérant la fonction associée* f, *et en regardant à quoi est équivalent* f *en* $+\infty$. *Ensuite, on a* c *grâce à la formule précédente.* b *peut être obtenu par évalation en* 0...

Il se peut que la factorisation du dénominateur soit pénible. La technique précédente sera alors avantageusement remplacée par le résultat suivant.

Proposition 3 *Supposons que* $F = \frac{P}{Q}$ *(écriture irréductible) admet* p *comme racine simple. Alors le résidu en* p *vaut* $\frac{P(p)}{Q'(p)}$ *("formule des résidus").*

Preuve : Utiliser le résultat précédent, et évaluer la dérivée du produit $(X-p)Q_1$ en p. ■

Pour calculer un résidu, on pourra donc :
- factoriser/multiplier/évaluer ;
- appliquer la formule du résidu.

Exemples 1
- *On commence par l'indispensable* $\frac{1}{X^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{X-1} - \frac{\frac{1}{2}}{X+1}$.
- *Si on note* $j = e^{2i\pi/3}$: $\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{j}{X-j} + \frac{\overline{j}}{X-\overline{j}}\right)$.
- *Si* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\omega = e^{2i\pi/n}$:
$$\frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega^k}{X-\omega^k}.$$
- *Si on note* $\alpha = e^{i\pi/4}$:
$$\frac{1}{X^4+1} = \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{X-\alpha} - \frac{\overline{\alpha}}{X+\overline{\alpha}} - \frac{\alpha}{X+\alpha} + \frac{\overline{\alpha}}{X-\overline{\alpha}}\right).$$

2.3 Pôle double

Si p est *pôle double* (de multiplicité 2) de F, on a

$$F = E + \frac{\alpha}{X-p} + \frac{\beta}{(X-p)^2} + R,$$

où R n'admet pas p comme pôle. On peut alors obtenir β par multiplication par $(X-p)^2$ suivie d'une évaluation en p. Cette technique est bien adaptée au cas où le dénominateur est factorisée.

Pour obtenir α, on peut ensuite considérer $F - \dfrac{\beta}{(X-p)^2}$ donc p est pôle simple (éventuellement, p n'est pas pôle), et on est ramené à un cas plus simple. Cela dit, la différence $F - \dfrac{\beta}{(X-p)^2}$ induit des calculs pénibles. On utilisera en général un panachage de diverses méthodes :

- évaluation de la fraction en divers points (ce qui fournit des équations linéaires vérifiées par les coefficients recherchés) ;
- utilisation de limites de fonctions associées en $+\infty$, après multiplication/division éventuelle par X^k. On obtient là encore des équations linéaires vérifiées par les coefficients recherchés.

Exemples 2

On commence par écrire les formes a priori des décompositions :

- $F = \dfrac{X+1}{(X-1)^2} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{(X-1)^2}$ *(le degré de F est strictement négatif, donc sa partie entière est nulle). L'évaluation de $(X-1)^2F$ en 1 fournit $b=2$, et la limite de $t\widetilde{F}(t)$ en $+\infty$ fournit $b=1$:*

  $$\frac{X+1}{(X-1)^2} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2}.$$

  On vérifie avec $\widetilde{F}(0)$.
- $G = \dfrac{2X^2+1}{(X-1)^2} = a + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{(X-1)^2}$ *(la partie entière est de degré nul, comme G). La limite de $\widetilde{G}$ en $+\infty$ fournit $a=2$. L'évaluation de $(X-1)^2G$ en 1 fournit $c=3$, et l'évaluation de G en 0 donne $1 = 2-b+3$, donc $b=4$:*

  $$\frac{2X^2+1}{(X-1)^2} = 2 + \frac{4}{X-1} + \frac{3}{(X-1)^2}.$$

  On vérifie avec $\widetilde{G}(-1)$.
- $H = \dfrac{X^3+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{c}{X+1} + \dfrac{d}{(X+1)^2}\cdot$ *L'évaluation de $(X-1)^2H$ en 1 fournit $b = \dfrac{3}{4}$, et de même, $d = -\dfrac{1}{4}\cdot$ La limite de $t\widetilde{H}(t)$ en $+\infty$ fournit $a+c=1$, et l'évaluation en 0 donne $1 = -a + \dfrac{3}{4} + c - \dfrac{1}{4}$, puis $-a+c = \dfrac{1}{2}$, de sorte que $c = \dfrac{3}{4}$ et $a = \dfrac{1}{4}$:*

  $$H = \frac{\frac{1}{4}}{X-1} + \frac{\frac{3}{4}}{(X-1)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{X+1} - \frac{\frac{1}{4}}{(X+1)^2}.$$

  On vérifie avec $\widetilde{H}(2)$ (surtout pas $\widetilde{H}(0)$: pourquoi ?).

2.4 Au delà des pôles doubles (HP)

Il y a essentiellement 3 méthodes :

- On récupère le dernier terme par mutiplication/évaluation par $(X-p)^\alpha$, on fait la différence, et on continue.
- Si F est de la forme

$$\frac{P}{(X-p)^\alpha} = \frac{a_1}{X-p} + \frac{a_2}{(X-p)^2} + \cdots + \frac{a_\alpha}{(X-p)^\alpha},$$

  on multiplie par $(X-p)^\alpha$, et on obtient par évaluations/dérivations successives $a_\alpha = P(p)$, $a_{\alpha-1} = P'(p)$, …et $a_{\alpha-k} = \dfrac{P^{(k)}(p)}{p!}$ pour tout $k \in [\![0, \alpha-1]\!]$.
- Dans le cas général, la méthode la plus stable consiste à fair un DL de $(t-p)^p F(t)$ au voisinage de p. Comme il vaut par ailleurs

$$a_\alpha + a_{\alpha-1}(t-p) + a_{\alpha-2}(t-p)^2 + \cdots + a_1(t-p)^\alpha + o\big((t-p)^\alpha\big),$$

  on conclut par unicité du DL.

Exemple 3 $F = \dfrac{X^2+1}{(X-1)^7} = \dfrac{a_1}{X-1} + \dfrac{a_2}{(X-1)^2} + \cdots + \dfrac{a_7}{(X-1)^7}\cdot$ *On pose* $G = (X-1)^7 F$ *: d'une part,* $\widetilde{G}(1+t) = a_7 + a_6 t + a_5 t^2 + \cdot + a_1 t^7$*, et d'autre part :*

$$\widetilde{G}(1+t) = (1+t)^2 + 1 = 2 + 2t + t^2,$$

ce qui nous fournit par unicité du DL à l'ordre 7 : $a_7 = a_6 = 2$*,* $a_5 = 1$*, et* $a_k = 0$ *pour* $k \leq 4$*. Ainsi :*

$$F = \frac{1}{(X-1)^5} + \frac{2}{(X-1)^6} + \frac{2}{(X-1)^7}.$$

On vérifie avec $\widetilde{F}(0)$*.*

Exemple 4

$$\begin{aligned} H &= \frac{2X^2 - X + 1}{(X-1)^3(X+1)^3} \\ &= \frac{a_1}{X-1} + \frac{a_2}{(X-1)^2} + \frac{a_3}{(X-1)^3} + \frac{b_1}{X+1} + \frac{b_2}{(X+1)^2} + \frac{b_3}{(X+1)^3}. \end{aligned}$$

On pose $K = (X-1)^3 H$ *:* $\widetilde{K}(1+h) = a_3 + a_2 h + a_1 h^2 + o(h^2)$*, et par ailleurs après calcul :*

$$\widetilde{K}(1+h) = \frac{1}{8}\big(2(1+h)^2 - (1+h) + 1\big)(1+h/2)^{-3} = \frac{1}{4} + \frac{h^2}{16} + o(h^2),$$

de sorte que par unicité du DL, $a_3 = \dfrac{1}{4}$*,* $a_2 = 0$*, et* $a_1 = \dfrac{1}{16}\cdot$ *On calcule les* b_i *en faisant un DL de* $(X+1)^3 H$ *au voisinage de* -1*, pour trouver finalement :*

$$H = \frac{\frac{1}{16}}{X-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(X-1)^3} + \frac{-\frac{1}{16}}{X+1} + \frac{-\frac{1}{8}}{(X+1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{(X+1)^3}.$$

On vérifie avec $\widetilde{H}(0)$*.*

3 Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$

3.1 Théorème de décomposition

PROPOSITION 4 *Soit $F \in \mathbb{R}(X)$. On suppose $F = \dfrac{P}{Q}$ (écriture irréductible), avec Q unitaire (c'est toujours possible) de factorisation en produits d'irréductibles sur $\mathbb{R}$:*

$$\prod_{i=1}^{k}(X - x_i)^{\alpha_i}\prod_{i=1}^{r}(X^2 + \lambda_i X + \beta_i)^{\rho_i}.$$

Alors il existe un unique polynôme E, des réels $a_{i,j}$ ($1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq \alpha_i$), $b_{i,j}$ et $c_{i,j}$ ($1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq \rho_i$) tels que :

$$F = E + \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{a_{i,j}}{(X - x_i)^j}\Big) + \sum_{i=1}^{r}\Big(\sum_{j=1}^{\rho_i}\frac{b_{i,j}X + c_{i,j}}{(X^2 + \lambda_i X + \beta_i)^j}\Big).$$

PREUVE : Par exemple en regroupant les termes complexes conjugués... ce n'est ni trivial, ni horriblement difficile, ni intéressant ; on zappera donc. ■

EXEMPLE 5

$$\begin{aligned}\frac{X^2 + X + 1}{(X^2+1)(X^2-1)} &= \frac{-\frac{1}{4}}{X - i} + \frac{-\frac{1}{4}}{X + i} + \frac{\frac{3}{4}}{X - 1} + \frac{-\frac{1}{4}}{X + 1}\\ &= \frac{-\frac{1}{2}X}{X^2 + 1} + \frac{\frac{3}{4}}{X - 1} + \frac{-\frac{1}{4}}{X + 1}.\end{aligned}$$

Les paragraphes qui suivent donnent des méthodes systématiques, mais en pratique, on panache avec des considérations de parité, des limites, des évaluations...

3.2 Pôles réels simples

C'est comme dans $\mathbb{C}$!

3.3 Pôles complexes conjugués simples

On peut bien entendu regrouper les termes complexes conjugués : si r est le résidu associé à la racine simple non réelle p, alors celui associé à $\overline{p}$ est $\overline{r}$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{r}{X - p} + \frac{\overline{r}}{X - \overline{p}} = \frac{(r + \overline{r})X - (r\overline{p} + p\overline{r})}{X^2 - (p + \overline{p})X + p\overline{p}},$$

qui est de la forme attendue (les coefficients de la forme $z + \overline{z}$ sont réels). Cependant, cette méthode nécessite de passer par la décomposition complexe, d'où des calculs inutiles et pénibles, donc avec erreur ...

Pour obtenir α et β en même temps dans le terme $\dfrac{\alpha X + \beta}{X^2 + aX + b}$, on préferera multiplier par $X^2 + aX + b$, et évaluer en ρ (l'une des racines complexes de $X^2 + aX + b$). L'idée est de NE PAS CALCULER ρ : ce qui nous intéresse n'est pas sa VALEUR mais CE QU'IL VERIFIE. Toute fraction en ρ peut se ramener en une expression de la forme $\lambda\rho + \mu$. On le fait en deux temps. D'abord, des simplifications de la forme $\rho^2 = -a\rho - b$ nous amènent à une fraction $\dfrac{c\rho + d}{e\rho + f}$. Pour que ceci soit égal à $\lambda\rho + \mu$, on est amené à résoudre un système de la forme $A\rho + B = C\rho + D$ avec A, B, C, D réels. Ceci se ramène à $A = C$ et $B = D$ car la famille $(1, \rho)$ est une famille libre (pourquoi ?) du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exemple 6 *On reprend l'exemple 5 :*

$$F = \frac{X^2+X+1}{(X^2+1)(X^2-1)} = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X+1}.$$

C'est le calcul de a et b qui nous intéresse ici. L'évaluation de $(X^2+1)F$ en i fournit $ai+b = \frac{i}{i^2-1} = -\frac{1}{2}i$, de sorte que $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 0$: il n'est plus nécessaire de passer par la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

Exemple 7

$$G = \frac{X+1}{(X^2+X+1)(X^2-X+1)} = \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{cX+d}{X^2-X+1}.$$

L'évaluation de $(X^2+X+1)G$ en j racine de X^2+X+1 fournit :

$$aj+b = \frac{j+1}{j^2-j+1} = \frac{j+1}{-2j} = -\frac{1}{2}(j^3+j^2) = -\frac{1}{2}(-1-j-j-j^2) = \frac{1}{2}j$$

(on a utilisé au maximum la relation $j^2 = -1-j\ldots$), de sorte que $a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$. En évaluant $(X^2-X+1)G$ en α racine de X^2-X+1, on obtient $c = -\frac{1}{2}$ et $d = 1$, de sorte que :

$$G = \frac{\frac{1}{2}X}{X^2+X+1} + \frac{-\frac{1}{2}X+1}{X^2-X+1}.$$

On vérifie avec $\widetilde{G}(0)$.

3.4 Pôles complexes conjugés d'ordre 2 et plus (HP)

La méthode décrite précédemment permet de trouver le terme dont la puissance du dénominateur est la plus élevée $\frac{\alpha X+\beta}{(X^2+aX+b)^k}$, puis les autres par soustraction. En fait, vu le coût d'une soustraction (qui doit être suivie d'une division), on utilise en général des méthodes annexes d'évaluation, etc...

Exemple 8

$$F = \frac{1}{(X+1)(X^2+X+1)^2} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2+X+1} + \frac{dX+e}{(X^2+X+1)^2}.$$

Par multiplication/évaluation, on trouve $a = 1$. En évaluant $(X^2+X+1)^2F$ en j racine de X^2+X+1, on trouve $dj+e = \frac{1}{1+j} = \frac{1}{-j^2} = -j$, de sorte que $d = -1$ et $e = 0$. La limite de $t\widetilde{F}(t)$ en $+\infty$ fournit $1+b = 0$, donc $b = -1$, et l'évaluation en 0 fournit $1 = 1+c+0$, donc $c = 0$, et finalement :

$$F = \frac{1}{X+1} - \frac{X}{X^2+X+1} - \frac{X}{(X^2+X+1)^2}.$$

On vérifie avec $\widetilde{F}(1)$.

Exemple 9

$$\begin{aligned} G &= \frac{X^2+1}{(X^3+1)^2} = \frac{X^2+1}{(X+1)^2(X^2-X+1)^2} \\ &= \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2-X+1} + \frac{eX+f}{(X^2-X+1)^2}. \end{aligned}$$

Par multiplication/évaluation, on trouve $a = \frac{2}{9}\cdot$ *En évaluant* $(X^2 - X + 1)^2 G$ *en* α *racine de* $X^2 - X + 1$ *on obtient*

$$e\alpha + f = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{1}{3},$$

d'où $e = 0$ *et* $f = \frac{1}{3}\cdot$ *La limite de* $t\widetilde{G}(t)$ *en* $+\infty$ *fournit* $b + c = 0$*, et l'évaluation de* G *en* i *(astuce : on va obtenir deux équations réelles...) fournit :*

$$0 = \frac{1}{9i} + \frac{b}{1+i} + \frac{ci+d}{-i} - \frac{1}{3} = \Big(-\frac{1}{9} - \frac{b}{2} + d\Big)i + \frac{1}{2}b - c - \frac{1}{3},$$

donc $-\frac{1}{9} - \frac{b}{2} + d = 0$ *et* $\frac{1}{2}b - c - \frac{1}{3} = 0$*, puis* $b = d = -c = \frac{2}{9}$*, et finalement :*

$$G = \frac{\frac{2}{9}}{(X+1)^2} + \frac{\frac{2}{9}}{X+1} + \frac{-\frac{2}{9}(X-1)}{X^2-X+1} + \frac{\frac{1}{3}}{(X^2-X+1)^2}\cdot$$

On vérifie avec $\widetilde{G}(0)$*.*

Exemple 10

$$H = \frac{X+1}{(X^2+1)^3(X^2-X+1)} = \frac{a_1X+b_1}{X^2+1} + \frac{a_2X+b_2}{(X^2+1)^2} + \frac{a_3X+b_3}{(X^2+1)^3} + \frac{cX+d}{X^2-X+1}\cdot$$

Par évaluation de $(X^2+1)^3H$ *en* i*, on trouve* $a_3 i + b_3 = \frac{1+i}{-i} = -1 + i$*, donc* $a_3 = 1$*,* $b_3 = -1$*. Par évaluation de* $(X^2 - X + 1)H$ *en* α *racine de* $X^2 - X + 1$*, on trouve* $c\alpha + d = \frac{1+\alpha}{\alpha^3} = -1 - \alpha$ *(pourquoi ?), donc* $c = d = -1$*.*
La limite de $t\widetilde{H}(t)$ *en* $+\infty$ *fournit* $0 = a_1 - 1$*, soit* $a_1 = 1$*, et l'évaluation de* $\widetilde{H}$ *en* 0 *donne* $1 = b_1 + b_2 - 1 - 1$*, soit* $b_1 + b_2 = 3$*. Il manque deux équations réelles : on va astucieusement évaluer* H *en* j *racine de* X^2+X+1 *pour obtenir après calculs* $b_1 - a_2 = 0$ *et* $\frac{3}{2} + a_2 - b_1 - b_2 = \frac{1}{2}$*, puis* $a_2 = b_1 = 2$ *et* $b_2 = 1$*, soit finalement :*

$$H = \frac{X+1}{(X^2+1)^3(X^2-X+1)} = \frac{X+2}{X^2+1} + \frac{2X+1}{(X^2+1)^2} + \frac{X-1}{(X^2+1)^3} - \frac{X+1}{X^2-X+1}\cdot$$

Ceux à qui il reste des forces peuvent vérifier avec $\widetilde{H}(1)$*...*

3.5 Considérations de parité

Lorsque la fraction à décomposer est paire ou impaire, on obtient facilement des relations sur les coefficients de la décomposition en utilisant l'UNICITE de celle-ci.

Exemple 11 *On cherche à décomposer sur* $\mathbb{R}$ *la fraction* $F = \frac{X^2+1}{X^4+X^2+1}\cdot$ *En un temps raisonnable*[2]*, on obtient la factorisation du dénominateur :* $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$*. Le théorème de décomposition nous amène à écrire :*

$$F = \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{cX+d}{X^2-X+1}\cdot$$

Puisque $F(X) = F(-X)$*, on a :*

$$\frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{cX+d}{X^2-X+1} = \frac{-aX+b}{X^2-X+1} + \frac{-cX+d}{X^2+X+1},$$

[2] "A vue", ou bien en passant par la décomposition sur $\mathbb{C}$ (les racines de ce polynômes sont les complexes dont le carré est racine de $X^2 + X + 1$, etc...)

et par unicité de la décomposition, on a donc $a = -c$ *et* $b = d$*. On calcule alors* $F(0) = b + d = 1$ *donc* $b = d = \dfrac{1}{2}$ *puis* $F(i) = 0 = (a - i/2) + (-c + i/2) = 2a$*, donc* $a = c = 0$*. Ainsi :*

$$\frac{X^2+1}{X^4+X^2+1} = \frac{1/2}{X^2+X+1} + \frac{1/2}{X^2-X+1}.$$