Algèbre linéaire en dimension finie

1 Rappels - généralités

EXERCICE 1 Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u$ (n itérations, avec $u^0 = \mathrm{Id}_E$ par convention). On note également : $K_n = \mathrm{Ker}\ u^n$ et $I_n = \mathrm{Im}\ u^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $K_n \subset K_{n+1}$ et $I_{n+1} \subset I_n$.
2. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K_{n_0} = K_{n_0+1}$. Montrer qu'alors $K_n = K_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$.
3. Même chose avec $I_n \ldots$

EXERCICE 2 Soit E un $\mathbb{K}$-ev et f une forme linéaire non nulle sur E ($f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \ldots$) On fixe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$ (c'est licite car $f \neq 0$).

On note $H = \mathrm{Ker}\, f$. Montrer : $E = H \oplus \mathbb{R}x_0$.

EXERCICE 3 Soit $E = \mathbb{R}^4$. On note :

$$E_1 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y = z - t \text{ et } x + 2y = z\right\}$$

et $E_2 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, avec $u_1 = (-1, 0, 1, 1)$ et $u_2 = (1, -2, 3, 0)$.

1. Montrer : $E = E_1 \oplus E_2$.
2. Soit p la projection sur E_1 de direction E_2. Calculer explicitement la valeur de $p(x, y, z, t)$ (si ce vecteur vaut (x', y', z', t'), on demande d'exprimer x', y', z' et t' en fonction de x, y, z et t)
3. Même chose avec la symétrie s par rapport à E_2, de direction E_1 (on pourra faire beucoup de nouveaux calculs... ou bien exprimer s en fonction de $p \ldots$)

EXERCICE 4 Montrer que l'application $(x, y, z) \mapsto \big(x, (y + z)/2, (y + z)/2\big)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, puis que c'est une projection dont on déterminera les directions propres.

EXERCICE 5 Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $T(f)(x) = f(0)$ si $x = 0$ et $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ si $x > 0$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Discuter son injectivité et sa surjectivité (dans un deuxième temps, on déterminera l'image et le noyau).

2 Espaces de dimension finie - théorème du rang

Exercice 6 Reprendre l'exercice 3, et donner les dimensions de E_1 et E_2.

Exercice 7 Soit E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, ce qui signifie qu'il existe $p > 0$ tel que $u, u^2, \dots, u^{p-1} \neq 0$ et $u^p = 0$ (p est "l'indice de nilpotence" de u). Montrer que $\big(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\big)$ est libre. Que peut-on en déduire ?

Exercice 8 Soit E un espace de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer : $\operatorname{rg} u^n = \operatorname{rg} u^{n+1}$.

Exercice 9 Déterminer le rang des familles suivantes de vecteurs :

1. (f_1, f_2) avec $f_1 = (1, -2, 3)$ et $f_2 = (0, 1, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$;
2. (f_1, f_2, f_3) avec $f_1 = (1, 1, 3)$, $f_2 = (0, 1, 1)$ et $f_3 = (1, -1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$;
3. (f_1, f_2, f_3) avec $f_1 = (1, 0, 1, a+1)$, $f_2 = (2, -a, a, 0)$ et $f_3 = (0, a, a, a)$ dans $\mathbb{R}^4$, où a est un réel donné.

Exercice 10 (*)

Soient E et G deux espaces vectoriels de dimension finie, et F un sous-espace de E. On note $H = \big\{ f \in \mathcal{L}(E, G) \;\big|\; F \subset \operatorname{Ker} f \big\}$. Montrer que H est un sev de $\mathcal{L}(E, G)$ et calculer sa dimension.
On pourra voir H comme le noyau ou l'image d'une bonne application linéaire entre deux bons espaces vectoriels, et appliquer un théorème qui sert souvent en dimension finie...

Exercice 11 Reprise de l'exercice 1 : on suppose maintenant que E est de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe effectivement $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K_{n_0} = K_{n_0+1}$, et qu'alors, on a $I_{n_0} = I_{n_0+1}$.
2. Trouver un contre-exemple en dimension finie

Exercice 12 Calculer la dimension des espaces suivants :

1. $E = \big\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\big|\; P(2048) = P(1) = 0 \big\}$.
2. $H_1 \cap H_2$, où H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts de E espace de dimension finie.

Exercice 13 Soient $3n$ réels $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ et $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n$.

1. Montrer qu'existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad P(x_i) = y_i \;\text{ et }\; P'(x_i) = z_i.$$
2. Que vient-on de faire ? ! ? !
3. Généraliser ! !

Exercice 14 (*)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur F et G deux sous-espaces de E (de dimension finie) pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} u = F$ et $\operatorname{Ker} u = G$.

Exercice 15 (**)

Soient $x_1, \dots, x_n$ n réels distincts. Montrer qu'il existe une unique famille $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \int_{2000}^{2001} P = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(x_k).$$

Exercice 16 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tel que $u^2 = 0$. Montrer : $\operatorname{rg} u \leq 2$.