Algèbre linéaire
en dimension finie

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps : $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les résultats énoncés dans ce chapitre sont parmi ceux les plus utilisés en taupe. Il est essentiel qu'ils deviennent le plus rapidement possible instinctifs ...

1 Rappels d'algèbre linéaire

1.1 Applications linéaires

Définition 1
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application linéaire de E dans F est une application $f : E \to F$ telle que pour tout $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$: il s'agit d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, si on le munit de la somme et de la multiplication externe "naturelles".

Proposition 1 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*
- *Si G est un troisième espace vectoriel et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$. En particulier, $\big(\mathcal{L}(E), +, ., \circ\big)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.*
- *Si f est bijective (on parle alors d'isomorphisme), alors son application réciproque $f^{-1} : F \to E$ est linéaire.*
- *Si $E_1 < E$, alors $f(E_1) < F$.*
- *Si $F_1 < F$, alors $f^{-1}(F_1) < E$ (ici, f n'est pas forcément bijective).*

Définition 2
Le *noyau* de $f \in \mathcal{L}(E, F)$, noté Ker f, est l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) = 0_F$: c'est un sous-espace de E d'après le résultat précédent. L'*image* de f est le sous-espace de F : Im $f = f(E)$.

Définition 3
Une *forme linéaire sur E* est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. Un *hyperplan* de E est le noyau d'une forme linéaire sur E non nulle.

1.2 Familles libres, génératrices ; bases

Définition 4
Soit $v_1, \dots, v_n \in E$. Notons φ l'application de $\mathbb{K}^n$ dans E définie par $\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. On dit que la famille $(v_1, \dots, v_n)$:
- est *libre* si la seule combinaison linéaire (CL) nulle des v_i est la CL triviale, ce qui revient à dire que φ est injective ;
- est *génératrice* si tout vecteur de E peut s'exprimer comme CL des v_i, ce qui revient à dire que φ est surjective ;
- est une *base* de E si elle est libre et génératrice (c'est-à-dire : φ est bijective). Cela revient à dre que tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme CL des v_i.

Les résultats suivants décrivent le comportement des applications linéaires vis-à-vis des familles libres et génératrices. Il faut être capable de les montrer instantanément, pour pouvoir se rassurer en cas de doute, lorsqu'on veut les appliquer...

Proposition 2
- *Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective, alors $\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big)$ est une famille libre de F.*
- *Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille génératrice de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective, alors $\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big)$ est une famille génératrice de F.*

Corollaire 1 *Si u est un isomorphisme de E sur F et $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors $\big(u(e_1), \ldots, u(e_n)\big)$ est une base de E.*

Exercice 1 *Soient $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que si $\big(u(x_1), \ldots, u(x_p)\big)$ est libre, alors $(x_1, \ldots, x_p)$ l'est aussi.*

Solution : Ne pas confondre "je montre ce qu'il faut montrer" et "j'écris tout ce que je sais en utilisant les hypothèses"... On notera que la réciproque est fausse (donner un contre-exemple).

Le résultat suivant dit qu'une application linéaire est *caractérisée* par ses valeurs sur une base.

Fait 1 *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $y_1, \ldots, y_n \in F$. Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u(e_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.*

Preuve : Prendre $x \in E$, le décomposer selon $\mathcal{B}$, en déduire la forme **nécessaire** de $u(x)$. Montrer ENSUITE qu'on a bien défini une application qui répond au problème (en particulier, on prouvera la linéarité). ∎

1.3 Sommes de sous-espaces

Définition 5

- Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces de E, $E_1 + E_2$ désigne l'ensemble des vecteurs de la forme $v_1 + v_2$, avec $v_1 \in E_1$ et $v_2 \in E_2$: il s'agit d'un sous-espace de E (l'établir !).
- Dans le cas où $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, on parle de *somme directe* et on note $E_1 \oplus E_2$.
- Si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et $E_1 + E_2 = E$ (c'est-à-dire : $E = E_1 \oplus E_2$), alors E_1 et E_2 sont dits *supplémentaires*.

Remarques 1

- BIEN ENTENDU, on ne confondra pas la somme et la réunion ; pas plus qu'**UN** supplémentaire et **LE** complémentaire. On ne verra donc **JAMAIS** ni cette année ni l'année prochaine d'horreur du genre : "$E = E_1 \oplus E_2$ et $x \notin E_1$, donc $x \in E_2$"...
- Dire que E_1 et E_2 sont supplémentaires revient à dire que tout vecteur de E se décompose de façon unique comme somme d'une vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2. Vérifier l'équivalence...

Exemples 1

- *Si $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) désigne l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires), on a $E = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$.*
- *$\mathbb{R}^2 = F \oplus G$, avec $F = \mathbb{R}(1, 0)$ et $G = \mathbb{R}(0, 1)$.*
- *Si on note $F = \mathbb{R}(1, 0, 0) + \mathbb{R}(0, 1, 0)$ et $G = \mathbb{R}(0, 1, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 1)$, on a $\mathbb{R}^3 = F + G$.*

Remarque 2 Lorsque $E = E_1 \oplus E_2$, pour montrer que deux applications linéaires $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ sont égales, il suffit de prouver que $u|_{E_1} = v|_{E_1}$ et $u|_{E_2} = v|_{E_2}$: pourquoi ?

Définition 6

Si P est une partie de E, $<P>$, ou $\mathrm{Vect}(P)$, désigne l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de P. $\mathrm{Vect}(P)$ est le *sous-espace engendré par P*.

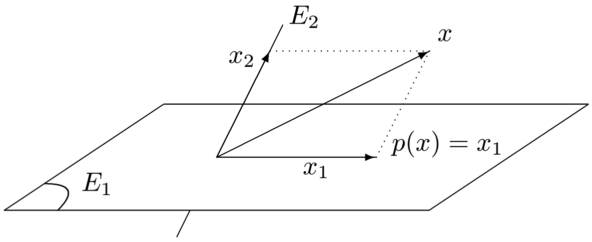
Remarque 3 $\mathrm{Vect}(P)$ est un sous-espace de E qui contient P. De plus, tout sous-espace qui contient P contient $\mathrm{Vect}(P)$ (pourquoi ?). En ce sens, $\mathrm{Vect}(P)$ est "le plus petit" sous-espace qui contient P. On définit d'ailleurs parfois $\mathrm{Vect}(P)$ de cette façon (on montre *ensuite* que c'est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $P\ldots$).

Exercice 2 *Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et $k \in [\![1, n-1]\!]$. Montrer que que si on pose $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$, alors $E = F \oplus G$.*

1.4 Projections vs projecteurs

Dans ce paragraphe et le suivant, "*les dessins sont autorisés*"...

DÉFINITION 7
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel E. Si $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. On dit alors que x_1 est *la projection de x sur E_1 dans la direction E_2.*



Projection sur E_1 parallèlement à E_2

Il faut savoir prouver les résultats qui suivent : on utilise quasi exclusivement la définition d'une projection.

PROPOSITION 3 Propriétés des projections
Soit p la projection sur E_1 parallèlement à E_2. Alors :
- *p est linéaire et vérifie $p \circ p = p$.*
- $\mathrm{Im}\, p = E_1$ *et* $\mathrm{Ker}\, p = E_2$.
- $E_1 = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id})$.

PREUVE :
- Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, et $x, y \in E$, que l'on décompose selon E_1 et E_2 : $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$. On a alors
$$\lambda x + y = (\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2),$$
avec (propriété des sev) $\lambda x_1 + x_2 \in E_1$ et $\lambda y_1 + y_2 \in E_2$, de sorte que
$$p(\lambda x + y) = \lambda x_1 + x_2 = \lambda p(x) + p(y).$$
Toujours avec les même notations, on a $x_1 = x_1 + 0$, avec $x_1 \in E_1$ et $0 \in E_2$, donc $p(x_1) = x_1$, soit : $(p \circ p)(x) = p(x)$.
- Clairement, $\mathrm{Im}\, p \subset E_1$ et $E_2 \subset \mathrm{Ker}\, p$ (si $x \in E_2$, on a $x = 0 + x$ avec $0 \in E_1$ et $x \in E_2$, donc $p(x) = 0$). Pour les inclusions opposées, fixons d'abord $x \in E_1$: $p(x) = x$ d'après ce qui précède, donc $x \in \mathrm{Im}\, p$. Enfin, si on prend $x \in \mathrm{Ker}\, p$, on écrit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$: $p(x) = x_1 = 0$, donc $x = x_2 \in E_2$.
- Toujours en écrivant $x = x_1 + x_2$, on a $p(x) = x$ si et seulement si $x_2 = 0$, ce qui est *équivalent* à : $x \in E_1$.

■

Le résultat suivant dit que la relation $p \circ p = p$ *caractérise* les projections parmi les applications linéaires.

PROPOSITION 4 Caractérisation des projections comme projecteurs
Soit f une application linéaire telle que $f \circ f = f$ (une telle application est un projecteur*). Alors, si on pose* $F_1 = \mathrm{Im}\, f$ *et* $F_2 = \mathrm{Ker}\, f$ *:*
- *$E = F_1 \oplus F_2$;*
- *f est la projection sur F_1 de direction F_2.*

PREUVE :

- Déjà, si $x \in F_1 \cap F_2$, on a $f(x) = 0$, et il existe $y \in E$ tel que $f(y) = x$; mais alors $x = f(y) = f\big(f(y)\big) = f(x) = 0$. Pour montrer $F_1 + F_2 = E$, on fixe $x \in E$: on a $x = f(x) + \big(x - f(x)\big)$, avec $f(x) \in \operatorname{Im} f$, et on vérifie sans mal que $x - f(x) \in \operatorname{Ker} f$ (linéarité et relation $f \circ f = f$).
- Soit $x \in E$: il peut se décomposer d'après ce qui précède sous la forme $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$. On a alors $f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1)$. Mais x_1 s'écrit $x_1 = f(z) = f\big(f(z)\big) = f(x_1)$, de sorte que $f(x) = x_1$, et f est bien la projection sur F_1 parallèlement à F_2.
  On pouvait également utiliser la remarque 2.

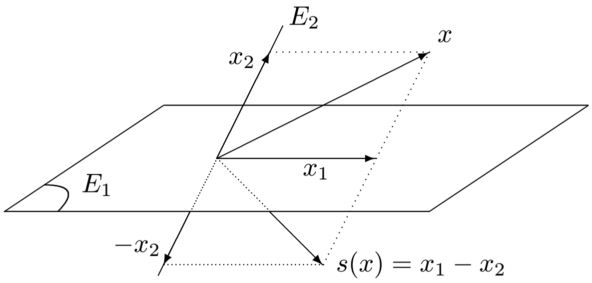
■

Remarque 4 *A posteriori*, projections et projecteurs désignent donc les mêmes objets.

1.5 Symétries vs involutions linéaires

On va définir ici géométriquement les *symétries*, puis les caractériser par une équation fonctionnelle parmi les applications linéaires, comme dans le paragraphe précédent pour les projections.

Définition 8
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel E. Si $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. On définit alors $s(x) = x_1 - x_2$: s est *la symétrie par rapport à E_1 dans la direction E_2*.



Symétrie par rapport à E_1 dans la direction E_2.

Proposition 5 Propriétés des symétries
Soit s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2. Alors :
- *s est linéaire et vérifie $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.*
- *s est bijective (en particulier, $\operatorname{Im} s = E$ et $\operatorname{Ker} s = \{0_E\}$).*
- *$E_1 = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $E_2 = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id})$.*

Preuve : Même principe que pour les projections du paragraphe précédent ... ■

Proposition 6 Caractérisation des symétries comme involutions linéaires.
Soit f une application linéaire telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$ (une telle application est une involution linéaire*). Alors, si on pose $F_1 = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $F_2 = \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$:*
- *$E = F_1 \oplus F_2$;*
- *f est la symétrie par rapport à F_1 dans la direction F_2.*

Preuve : Idem... ■

Remarque 5 Voila un chapitre pour lequel les khôlleurs vont avoir bien du mal à trouver des questions de cours à poser...

2 Théorie de la dimension

DÉFINITION 9
Un espace E est dit *de dimension finie* lorsqu'il admet une famille génératrice finie.

REMARQUE 6 On verra bientôt que cette condition est équivalente à l'existence d'une *base* finie.

EXEMPLES 2
- $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ *(ce dernier peut être vu comme espace de dimension finie sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *: pourquoi ?).*
- $\mathbb{K}_n[X]$ *est de dimension finie.*
- $\mathbb{R}[X]$ *n'est pas de dimension finie (raisonner par l'absurde).*
- *L'espace* $\mathcal{C}([0,1])$ *n'est pas de dimension finie : raisonner à nouveau par l'absurde, ou utiliser le résultat précédent (préciser...).*

2.1 Théorème de la base incomplète

Le résultat suivant dit que si la famille (u_2, u_{15}, u_{30}) est libre et la "sur-famille" $(u_2, u_{10}, u_{15}, u_{16}, u_{20}, u_{30})$ est génératrice, alors il existe une "famille intermédiaire", par exemple $(u_2, u_{15}, u_{20}, u_{30})$, qui est une base de E.

THÉORÈME 1 *I et K sont deux ensembles finis (d'indices) vérifiant $I \subset K$.*

Si $(v_i)_{i\in I}$ est une famille libre de E et $(v_i)_{i\in K}$ est une famille génératrice, alors il existe J tel que $I \subset J \subset K$ et $(v_i)_{i\in J}$ est une base de E.

PREUVE : Considérer une famille libre *maximale* "coincée" entre $(v_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in K}$. ■

Le résultat précédent est rarement utilisé à l'état brut : on utilise plutôt ses conséquences suivantes :

COROLLAIRE 2
1. *De toute famille finie génératrice, on peut extraire une base.*
2. *Tout espace de dimension finie admet une base finie.*
3. *Si E est de dimension finie, toute famille libre peut être complétée en une base.*

PREUVE :
1. Pour la famille libre, on prend un singleton constitué d'un vecteur non nul quelconque de la famille génératrice.
2. Conséquence instantanée de ce qui précède.
3. Pour la famille génératrice, on prend la réunion de la famille libre et d'une famille génératrice de E (qui est de dimension finie).

■

REMARQUE 7 On souhaiterait définir la dimension d'un espace de dimension finie comme le cardinal de ses bases. Pour cela, il convient de montrer que toutes les bases sont finies de même cardinal. C'est l'objet du paragraphe suivant.

2.2 Définition de la dimension

THÉORÈME 2 *Si dans un espace donné E il existe une famille libre de cardinal p et une famille génératrice de cardinal n, alors $p \leq n$.*

Preuve : On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que si un espace possède une partie génératrice $(w_1, \dots, w_n)$, alors toute famille de cardinal $n+1$ $(v_1, \dots, v_{n+1})$ est liée.

Pour cela, on écrit $v_i = \sum \alpha_{i,j} w_j$ pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$. Si $\alpha_{i,n} = 0$ pour tout i, alors $v_i \in \mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_{n-1})$ pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$. On applique alors l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$ dans l'espace $\mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_{n-1})$.

S'il existe i_0 tel que $\alpha_{i_0,n} \neq 0$, on note que pour tout $i \in [\![1, n+1]\!] \setminus \{i_0\}$:

$$v_i - \frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{i_0,n}} v_{i_0} \in F = \mathrm{Vect}\{w_1, \dots, w_{n-1}\}.$$

On obtient ainsi n vecteurs de F, qui est généré par $n-1$ vecteurs. Les $v_i - \dfrac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{i_0,n}} v_{i_0}$ $(i \neq i_0)$ sont donc liés, ce qui fournit des λ_i non tous nuls tels que :

$$\sum_{i \neq i_0} \lambda_i v_i - \Big(\sum_{i \neq i_0} \frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{i_0,n}} \lambda_i\Big) v_{i_0} = 0,$$

ce qui fournit une CL nulle non triviale des v_i. ■

Corollaire 3 *Si E admet une base finie, alors toutes les autres bases sont finies de même cardinal : ce cardinal est par définition la dimension de E, notée* $\dim E$.

Preuve : Appliquer le résultat précédent dans les deux sens ! ■

Corollaire 4 *Dans un espace de dimension n, toute famille libre a un cardinal $\leq n$, et toute famille génératrice a un cardinal $\geq n$. Dans les deux cas, il y a égalité si et seulement si la famille est une base.*

Preuve : Applications directes du théorème précédent. Pour les cas d'égalité, on utilise en plus le théorème de la base incomplète. ■

Remarque 8 Ce dernier résultat ne dit **CERTAINEMENT PAS** que toute famille de cardinal $\leq n$ (resp. $\geq n$) est libre (resp. génératrice)...

Une conséquence très importante (en pratique comme en théorie) du dernier résultat est le :

Corollaire 5 *Si E est de dimension n, pour montrer qu'une famille de cardinal n est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre ou bien génératrice.*

Remarque 9 La liberté est en général plus simple à établir...

Exercice 3 *Montrer que si $(P_0, ..., P_n)$ est une famille de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ tels que* $\deg P_k = k$ *pour tout $k \in [\![0 n]\!]$, alors c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.*

2.3 Exemples fondamentaux

Exemples 3

- *$\{0\}$ est de dimension 0 (convention) ;*
- *$\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n : considérer la base canonique ;*
- *$\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$: considérer la base $(1, X, \dots, X^n)$.*
- *Si E est de dimension finie et s'il existe un isomorphisme de E vers F, alors F est de dimension finie égale à celle de E.*

Exercice 4

- *Montrer que $\mathbb{C}^3$ est de dimension 3.*
- *Montrer que pas du tout : $\mathbb{C}^3$ est en fait de dimension 6 ! !*

EXERCICE 5 *On suppose que F est de dimension finie et qu'il existe un isomorphisme de E vers F. Montrer que E est de dimension finie égale à celle de F.*

Plus élaboré :

PROPOSITION 7 *Si E et F sont deux espaces de dimension finie, alors $E \times F$ est de dimension finie égale à* $\dim E + \dim F$.

PREUVE : Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $(f_1, \dots, f_p)$ est une base de F, on montrera que

$$\big((e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_p)\big)$$

est une base de $E \times F$. ■

REMARQUE 10 BIEN ENTENDU, on ne peut même pas imaginer de voir écrit $\dim(E \times F) = (\dim E)(\dim F)$: on ne considérerait pas qu'il s'agit d'un lapsus, et que vous pensiez au *produit tensoriel* $E \otimes F\dots$

EXERCICE 6 *Dans le cas où $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^2$, on note (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) les bases canoniques de E et F. Montrer que les vecteurs (e_i, f_j) (pour $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\}$) constituent une famille liée de $E \times F$ (prendre des scalaires simples : 1 et -1).*

Dans la perspective des *matrices*, le résultat suivant et sa démonstration sont importants.

PROPOSITION 8 *Si E et F sont de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie égale à* $(\dim E)(\dim F)$.

PREUVE : Soit $p = \dim E$ et $n = \dim F$. On fixe $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on construit (cf lemme 1) une application linéaire $\delta_{i,j}$ de la façon suivante : il s'agit de l'unique application qui envoie e_j sur f_i et e_k sur 0_F pour tout $k \in [\![1, p]\!] \setminus \{j\}$.

La famille des $\delta_{i,j}$ constitue alors une base de $\mathcal{L}(E, F)$: le montrer soigneusement. ■

2.4 Dimension des sous-espaces

THÉORÈME 3 *Si E est de dimension finie et $F < E$, alors F est de dimension finie, avec* $\dim F \leq \dim E$. *De plus, il y a égalité si et seulement si $F = E$.*

PREUVE : Utiliser le TBI. Plus précisément, pour prouver l'existence d'une base finie de F, on s'inspirera de la preuve du TBI. ■

Dans bien des cas, on souhaite utiliser un supplémentaire (quelconque) d'un sous-espace donné. Le résultat suivant affirme que c'est toujours possible.

PROPOSITION 9 *Tout sous-espace d'un espace de dimension finie admet un supplémentaire.*

PREUVE : Prendre une base $(e_1, \dots, e_k)$ de F (c'est licite d'après le théorème précédent), la compléter en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E, puis considérer $\mathrm{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$. ■

REMARQUES 11
- Il n'y a *évidemment* pas unicité du supplémentaire : faire un dessin dans $\mathbb{R}^3$, avec F un plan.
- L'existence d'un supplémentaire reste valide même lorsque E n'est pas de dimension finie, mais c'est une autre histoire... qui repose sur le même principe : trouver une famille libre *maximale*, mais en un sens bien plus délicat ...

PROPOSITION 10 *Soient E_1 et E_2 deux sous-espace d'un espace E de dimension finie. Alors :*

- $\dim(E_1+E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$ *("formule de Grassman" pour certains).*
- *En particulier, si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E, alors* $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$.

Preuve : Construire à nouveau des bases à l'aide du TBI. ■

Remarques 12
- On notera la forte analogie avec le cardinal de la réunion de deux ensembles finis.
- Pour montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires, il suffit de montrer que $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$, et $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ [1] : pourquoi ?

Exercice 7 *(*)*
Soit E un espace de dimension finie, et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces de même dimension. Montrer qu'ils admettent un supplémentaire commun. On pourra commencer par travailler en dimension 2, lorsque E_1 et E_2 sont deux droites. Dans le cas général, partir d'une base de $E_1 \cap E_2$, complétée de diverses façons...

Solution :
- Si $E_1 = \mathbb{R}e_1$ et $E_2 = \mathbb{R}e_2$, il suffit de prendre $\mathbb{R}(e_1+e_2)$ (dessin puis preuve...).
- Passons au cas général en notant $F = E_1 + E_2$, et en trouvant G tel que $F = E_1 \oplus G = E_2 \oplus G$: on commence par prendre une base $(e_1, \dots, e_k)$ de $E_1 \cap E_2$, que l'on complète en rajoutant le même nombre de vecteurs (pourquoi ?) en des bases $(e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_r)$ et $(e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_r)$ de E_1 et E_2. Il suffit alors de prendre $G = \mathrm{Vect}(f_1+g_1, \dots, f_r+g_r)$.
- Il reste à prendre H un supplémentaire de F dans E, et poser $K = G + H$ ...

2.5 Cas des hyperplans

Proposition 11 *Si E est de dimension finie n et H est un hyperplan de E, alors* $\dim H = n-1$.

Preuve : Montrer qu'il existe $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = H \oplus \mathbb{R}x_0$. ■

Proposition 12 *Réciproquement, si E est de deimension finie n et H est un sous-espace de E de dimension $n-1$, alors H est un hyperplan.*

Preuve : Partir d'une base de H. La compléter en une base de E grâce à un vecteur non nul f, et considérer la projection sur $\mathbb{R}f$, dans la direction H. ■

3 Rang des applications linéaires

3.1 Rang d'une famille de vecteurs et d'une application

Lemme 1 *Si $v_1, \dots, v_p$ sont des vecteurs d'un espace E (pas nécessairement de dimension finie), alors $F = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ est de dimension finie $\leq p$.*

Preuve : Extraire une base de F à partir de la famille $(v_1, \dots, v_p)$. ■

Définition 10
- Le rang d'une famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_p)$ est la dimension de l'espace engendré par cette famille $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$.
- Le rang d'une application linéaire est la dimension, si elle est finie, de son image.

Proposition 13 *Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v_1, \dots, v_p \in E$.*
- $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_p) \leq p$, *avec égalité si et seulement si la famille est libre.*

[1] ou bien $E_1 + E_2 = E$, mais en général, il est plus facile de travailler avec l'intersection ...

- $\mathrm{rg}\big(f(v_1),\dots,f(v_p)\big)\leq \mathrm{rg}(v_1,\dots,v_p)$. *De plus, si f est injective, alors il y a égalité.*

PREUVE : Récurrences... ■

COROLLAIRE 6 *Si E et F sont isomorphes avec E de dimension finie, alors F est de dimension finie, avec* $\dim F = \dim E$.

EXERCICE 8 *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E ou F est de dimension finie. Montrer que f est de rang fini, avec de plus :*

$$\mathrm{rg}\ f \leq \mathrm{Min}(\dim E, \dim F).$$

3.2 Un lemme important

Le résultat suivant est à la base du théorème du rang. Dans certains cas, on ne peut pas appliquer directement ce dernier, alors que la connaissance du lemme peut permettre de s'en sortir.

Il n'est pas spécifique à la dimension finie.

LEMME 2 *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et E_1 un supplémentaire de* $\mathrm{Ker}\ u$ *dans E. Alors u induit un isomorphisme de E_1 sur* $\mathrm{Im}\ u$.

PREUVE : bijectif=injectif+surjectif ! ■

3.3 Le théorème du rang

THÉORÈME 4 *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E de dimension finie. Alors :*

$$\dim E = \mathrm{rg}\ u + \dim \mathrm{Ker}\ u.$$

PREUVE : Lemme précédent et formule de Grassman. On *commencera* par fixer UN supplémentaire de $\mathrm{Ker}\ u$ dans E... ■

REMARQUE 13 En aucun cas on n'impose à F d'être de dimension finie.

EXEMPLES 4

- *Pour une projection, le résultat est évident, n'est-il pas ?*
- *Même chose pour un isomorphisme.*
- *On retrouve facilement le fait qu'en dimension n, un hyperplan est de dimension $n-1$.*
- *Si $E = \mathbb{K}_n[X]$ et u est la dérivation, l'image est $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et le noyau $\mathbb{K}[X]$: $n+1 = n+1$; ouf...*

3.4 Une conséquence fondamentale

PROPOSITION 14 *Si $u \in \mathcal{L}(E)$, il y a équivalence entre :*

- *u est injective ;*
- *u est surjective ;*
- *u est bijective.*

PREUVE : Application importante mais pas franchement subtile du théorème du rang... ■

REMARQUES 14

- Le résultat reste vrai si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, avec E et F deux espaces de dimensions finies égales (même démonstration).
- Ici encore, on notera la forte analogie avec les applications entre ensembles finis de même cardinal.

- Si $E = \mathbb{K}[X]$ et D est la dérivation, on a D surjective mais non injective. Dans le cas où Φ est l'application $P \mapsto XP$, Φ est injective sans être surjective.
- D'une manière générale, dès qu'on cherche un contre-exemple en dimension infinie pour une propriété réputée spécifique à la dimension finie, on étudiera de près ces deux exemples ("*heuristique de Gonnord*").

3.5 Le groupe linéaire

Définition 11
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, le *groupe linéaire* de E, noté $GL(E)$ désigne l'ensemble des automorphismes (endomorphismes bijectifs) de E.

Muni de la loi $\circ$ de composition des applications, $GL(E)$ est un groupe (ouf !).

Exemples 5
- *Les homothéties $u \mapsto \lambda u$ de rapport $\lambda \neq 0$.*
- *Les symétries.*
- *Les affinités : si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces supplémentaires, l'affinité de base E_1, direction E_2 et rapport $k \neq 0$ est l'application qui à $x \in E$ se décomposant $x_1 + x_2$ ($x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$) associe $a(x) = x_1 + kx_2$. Par exemple, les symétries sont des affinités de rapport -1.*