Entiers naturels - dénombrement

1 Entiers

EXERCICE 1 Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

EXERCICE 2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

EXERCICE 3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{2n} + 15n - 1$ est divisible par 9.

EXERCICE 4 Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$ et $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j)^2$. On donnera des formes factorisées.

EXERCICE 5 (***) *Lemme des mariages*

Soient F et G deux ensembles finis[1], et φ une application de G dans $\mathcal{P}(F)$ telle que pour tout $X \subset G$, $\displaystyle\bigcup_{x \in X} \varphi(x)$ est de cardinal supérieur ou égal à celui de X.

Montrer qu'il existe une application injective m de G dans F telle que $m(g) \in \varphi(g)$ pour tout $g \in G$.

On pourra raisonner par récurrence, et commencer par traiter le cas où il existe une partie non triviale X_1 de G telle que $\displaystyle\bigcup_{x \in X_1} \varphi(x)$ est de cardinal égal à celui de X_1.

Les féministes pourront inverser les rôles de F et G...

EXERCICE 6 (*) *Un peu de congruences...*

Si n est un entier ≥ 2, on dit que deux entiers a et b "sont congrus modulos n" si n divise $b - a$. On note $a \equiv b\,[n]$, ou bien $a \equiv b$ s'il n'y a pas d'ambiguité concernant n.

1. Montrer que $a \equiv b\,[n]$ si et seulement si a et b ont même reste dans la division euclidienne par n.
2. Montrer que la relation $\equiv\ [n]$ est réflexive, symétrique, et transitive (on parle de *relation d'équivalence*).
3. On suppose : $a_1 \equiv b_1$ et $a_2 \equiv b_2$. Montrer : $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2$, $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2$, et $a_1^n \equiv b_1^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. (*) Déterminer le dernier chiffre dans la représentation décimale de 1789^{1789} (...) et 2007^{1515}.

[1] En fait, il suffit que G soit fini

5. (**) On note φ l'application qui à $n \in \mathbb{N}$ associe la somme des chiffres dans la représentation décimale de n (par exemple, $\varphi(1515) = 1+5+1+5 = 12$). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \equiv n\,[9]$, puis calculer

$$(\varphi \circ \varphi \circ \varphi)(4444^{4444}).$$

2 Dénombrement

Exercice 7 Un n-mot de Gauss est un $2n$ uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de $[\![1, n]\!]$ où chaque élément de $[\![1, n]\!]$ apparaît exactement deux fois (exemples : 1221, ou 14322134). Montrer que le nombre de n-mots est de $\dfrac{(2n)!}{2^n}\cdot$

On pourra raisonner par récurrence.

Exercice 8 *Principe du pigeonnier*

- Soit E un ensemble de cardinal $n+1$, et $E_1, \ldots, E_n$ des parties de E, ne s'intersectant pas deux-à-deux, et dont la réunion est E (on dit que les E_i forment une partition de E).
  Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que E_i est de cardinal ≥ 2.
- (*) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times [\![1, N]\!]$ tel que $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| \leq \dfrac{1}{q^2}\cdot$
  On pourra considérer $\left\{qx - E(qx) \;\middle|\; q \in [\![0, N]\!]\right\}$ *et séparer* $[0, 1[$ *en* N *intervalles.*

Exercice 9 *Paradoxe des anniversaires*

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Quelle est la proportion des applications de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, k^2]\!]$ qui sont injectives ?
- En utilisant la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$, montrer que cette proportion admet une limite $l > 0$ lorsque k tend vers $+\infty$.
- Même chose pour les applications de $[\![1, 2k]\!]$ dans $[\![1, k^2]\!]$ puis celles de $[\![1, 3k]\!]$ dans $[\![1, k^2]\!]$.

Exercice 10 (*)

Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, $S_{n,p}$ désigne le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.

1. Que dire de $S_{n,p}$ si $p > n$?
2. Déterminer $S_{n,1}$ et $S_{n,n}$.
3. Combien d'applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 2]\!]$ sont non-surjectives ? En déduire $S_{n,2}$.
4. Montrer : $S_{n,3} = 3^n - 3 - 3S_{n,2}$, et en déduire la valeur de $S_{n,3}$.
5. Si $0 \leq k < p$, montrer : $\displaystyle\sum_{q=k}^{p} (-1)^q \mathrm{C}_p^q \mathrm{C}_q^k = 0$.

   On écrira $\mathrm{C}_p^q \mathrm{C}_q^k$ *à l'aide de factorielles, puis comme un produit où* q *n'intervient qu'une seule fois.*

6. Montrer :
$$S_{n,p} = p^n - \sum_{k=1}^{p-1} \mathrm{C}_p^k S_{n,k}.$$
7. En déduire (soigneusement) :
$$S_{n,p} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} k^n \mathrm{C}_p^k.$$
8. Déduire de la question précédente la valeur des sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k^n\mathrm{C}_n^k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k^{n+1}\mathrm{C}_n^k$.
9. A p fixé, donner un équivalent de $\dfrac{S_{n,p}}{n^p}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (Facultatif : donner une interprétation "probabiliste" du résultat précédent)

EXERCICE 11 (*) *Théorème des chapeaux*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on pose $E_n = [\![1, n]\!]$, et on note D_n le nombre de bijections $f : E_n \to E_n$ sans point fixe ("*dérangements* de E_n"). On convient que D_0 vaut 1.

1. Etablir : $\forall n \in \mathbb{N},\ n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k D_k$.
2. Si $0 \le k < p$, montrer : $\displaystyle\sum_{q=k}^{p}(-1)^q \mathrm{C}_p^q \mathrm{C}_q^k = 0$ (se reporter à l'exercice précédent).
3. Déduire de ce qui précède : $D_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathrm{C}_n^k k!$
4. Démontrer que l'on a : $\dfrac{D_n}{n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\mathrm{e}}\cdot$

Si n personnes entrent dans une salle, déposent leur chapeau à l'entrée, et en reprennent un (au hasard) à la sortie, la probabilité pour qu'aucun ne retrouve le sien tend donc vers $\dfrac{1}{e}$ *; étonnant, non ?*

EXERCICE 12 (*) *Formule du crible*

Soient $E_1, \ldots, E_n$ n ensembles finis. Montrer :
$$|E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k}|\,.$$
On commencera par les cas où $n \le 4$.

On pourra reprendre les deux exercices précédents à l'aide de cette formule : on obtient les résultats quasi immédiatement !

EXERCICE 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les couples d'ensembles (A, B) tels que $A \subset B \subset [\![1, n]\!]$. Même chose avec $A \cap B = \emptyset$.

EXERCICE 14 (*)
Calculer le nombre moyen de points fixes d'une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur lui-même.
On pourra, à $k \in [\![1, n]\!]$ fixé, dénombrer les bijections qui fixent k.

3 Manipulations de C_n^k

EXERCICE 15 n est un entier ≥ 2. Montrer les relations suivantes :
- $1 - \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 - \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n = 0$.
- $\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n = n2^{n-1}$.
- $\mathrm{C}_n^1 - 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 - \cdots + (-1)^{n+1} n\mathrm{C}_n^n = 0$.
- $2.1\mathrm{C}_n^2 + 3.2\mathrm{C}_n^3 + 4.3\mathrm{C}_n^4 + \cdots + n(n-1)\mathrm{C}_n^n = n(n-1)2^{n-2}$.

EXERCICE 16 Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \mathrm{C}_n^k$.

EXERCICE 17 Soient $p, k \geq 1$. Montrer : $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_{p+i}^p = \mathrm{C}_{p+k+1}^{p+1}$.

EXERCICE 18 Soient $l, m, q, n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq q$. Montrer :

$$\sum_{k=0}^{l} \mathrm{C}_{l-k}^m \mathrm{C}_{q+k}^n = \mathrm{C}_{l+q+1}^{m+n+1}.$$

EXERCICE 19 (**)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $Q_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^n} (-1)^k \mathrm{C}_{2^n-k}^k$.

Déterminer Q_{100000}.

On pourra calculer les premiers Q_n avec Maple... Ensuite, on pourra montrer que si on note $R_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \mathrm{C}_{p-k}^k$, alors $R_{p+2} = R_{p+1} - R_p$ pour tout p, puis $(R_p)_{p \geq 0}$ est 6-périodique, ...