Corps des complexes

Table des matières

EXERCICE 1 *Quand l'expression a^b a-t-elle un sens ?*

1 Calculs dans $\mathbb{C}$

1.1 Le corps $\mathbb{C}$

PROPOSITION 1 *Il existe un corps commutatif*[1] *noté $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$ ainsi qu'un élément i vérifiant $i^2 = -1$, tel que tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit* de façon unique *$a + bi$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.*

REMARQUES 1

- Avec les notations de la proposition précédente, on dit que a (resp. b) est la *partie réelle* (resp. *imaginaire*) de z. On note $a = \operatorname{Re} z$ et $b = \operatorname{Im} z$.
- Un complexe est donc réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, alors qu'un complexe dont la partie réelle est nulle est dit "*imaginaire pur*".
- Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$, alors $z_1z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$.

1.2 Module, conjugaison

DÉFINITION 1
Si $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, on définit :

- le *module* de z, noté $|z|$, qui vaut $\sqrt{a^2 + b^2}$;
- le *conjugué* de z, noté $\overline{z}$, qui vaut $a - bi$.

REMARQUES 2

- Si $x \in \mathbb{R}$, $|x|$ désigne à la fois la partie réelle du réel x et le module du complexe x. Fort heureusement, ils ont la même valeur…
- z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$, alors que z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.

PROPOSITION 2 *Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: on a $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ et $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.*

PROPOSITION 3 *Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:*

- $|z_1|^2 = z_1\overline{z_1}$, *de sorte que* $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}$;
- $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$;
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, *avec égalité si et seulement si z_1 et z_2 sont positivement liés.*

PREUVE : Les deux premiers résultats sont de simples vérifications algébriques. Pour le dernier résultat, on prend le carré de la relation (il y a bien équivalence : pourquoi ?) en utilisant la relation $|z|^2 = z\overline{z}$, pour se ramener à une inégalité de la forme $\operatorname{Re} z \leq |z|$. ■

1.3 Interprétation géométrique

- Si on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on peut associer à $z = a + bi$ le point M de coordonnées (a, b) : on dit que M a pour *affixe* z, et on note $M(z)$.
- Si M a pour affixe z, $|z|$ représente la distance OM, et le point d'affixe $\overline{z}$ est l'image de M par la réflexion d'axe (Ox). De même, si $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$, alors $M_1M_2 = |z_1 - z_2|$.
- Si on fait l'analogie complexe/point, l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$ (resp. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\}$) représente le cercle (resp. le disque fermé) de centre $M_0(z_0)$ et de rayon R.

EXERCICE 2 *Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = |1 - z| = |1/z|$.*

[1] c'est-à-dire grosso modo un ensemble muni de deux lois de composition interne + et . ayant les propriétés usuelles de la somme et du produit des réels

2 Argument, forme exponentielle

2.1 La fonction exponentielle

La fonction exponentielle, définie a priori de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, peut être étendue à $\mathbb{C}$ de la façon suivante :

DÉFINITION 2
Si $z = a + bi$, on définit $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a(\cos b + i \sin b)$

On vérifiera sans mal ce qui suit :

PROPOSITION 4 *L'application* $\exp : z \mapsto e^z$ *réalise un morphisme de* $(\mathbb{C}, +)$ *dans* $(\mathbb{C}^*, +)$.

Ceci signifie que $\mathrm{e}^0 = 1$, et pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$ (donc $e^{-z_1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{z_1}}$: pourquoi ?).
A posteriori (paragraphe suivant), ce morphisme est surjectif.

2.2 Groupe des complexes de module 1, argument

DÉFINITION 3
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble constitué des complexes de module 1 ("groupe unimodulaire" : groupe signifie grosso-modo que $\mathbb{U}$ est stable par multiplication et $z \mapsto z^{-1}$).

PROPOSITION 5 *L'application* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \theta \mapsto e^{i\theta}$ *réalise un morphisme de* $(\mathbb{R}, +)$ *sur* $(\mathbb{U}, .)$*, de noyau* $2\pi\mathbb{Z}$

Cela signifie que $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{U}$, $\varphi(\theta) = 1$ si et seulement si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, et $\varphi(\theta_1 + \theta_2) = \varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2)$ pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

DÉFINITION 4
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Les *arguments* de z sont les réels θ tels que $\mathrm{e}^{i\theta} = \dfrac{z}{|z|}\cdot$

REMARQUES 3

- Puisque $\dfrac{z}{|z|}$ est de module 1, il existe bien de tels θ, par contre, il n'y a pas unicité : si θ_0 est un argument de z, alors LES arguments de z sont les réels de la forme $\theta_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Par abus de langage, on s'autorise cependant à parler de "*l'argument*" d'un complexe plutôt que "*un argument*"
- Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, il existe un unique argument compris dans $]-\pi, \pi[$: on dit que c'est l'*argument principal* de z.
- Si θ est un argument de z, alors θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$, où M est le point d'affixe z.

EXERCICE 3 *Si* $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$*, montrer que l'argument principal de* z *est l'unique* $\theta \in]-\pi, \pi[$ *tel que* $\tan \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{y}{|z| + x}\cdot$

Les résultats suivants sont simples (vus en terminale), mais il faut veiller à les énoncer précisément (en particulier, ne pas oublier la condition $r > 0\dots$).

PROPOSITION 6

- *Si* z *a pour module* ρ *et argument* θ*, alors* $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$.
- *Si* $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ ***avec*** r ***strictement positif****, alors* z *a pour module* r*, et un de ses arguments est* θ*. En particulier, si* $r_1\mathrm{e}^{i\theta_1} = r_2\mathrm{e}^{i\theta_2}$ *avec* $r_1, r_2 > 0$*, alors* $r_1 = r_2$ *et* $\theta_1 = \theta_2[2\pi]$ *(lire "modulo* 2π*", c'est-à-dire, à une constante de la forme* $2k\pi$ *près).*
- *Si* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ *ont pour arguments respectifs* θ_1 *et* θ_2*, alors un argument de* z_1z_2 *est* $\theta_1 + \theta_2$*, et un argument de* $\dfrac{1}{z_1}$ *est* $-\theta_1$.

Si ρ est le module de $z \neq 0$ et θ un de ses arguments, on note parfois en terminale $z = [\rho, \theta]$. En pratique, il est conseillé de revenir directement à la forme exponentielle $z = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$.

2.3 Formules de Moivre et Euler

Les résultats suivants sont des trivialités, mais sont bien utiles. Il faut UNIQUEMENT retenir : $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Le caractère quasi-instantané des preuves les rend simplissimes à retrouver en cas de doute. On n'entendra donc **JAMAIS** de "je confonds les deux formules", ou bien "je ne sais plus si je dois multiplier ou diviser, par 2 ou par $2i$", etc...

PROPOSITION 7 *Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:*
- $\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$;
- $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ *et* $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$.

EXERCICE 4 *Linéariser $\cos^5\theta$, et exprimer $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.*

2.4 L'EXEMPLE fondamental

En ce qui concerne les calculs de module et argument, ce qui suit doit devenir instantané :

EXEMPLE 1 *Si $\theta \in \mathbb{R}$ n'est pas de la forme $\pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $1 + e^{i\theta}$ a pour module $2\cos\dfrac{\theta}{2}$ et pour argument $\dfrac{\theta}{2}$ si $\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$, et $\dfrac{\theta}{2} + \pi$ sinon.*

PREUVE : On part de : $1 + \mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta/2}(\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta})\ldots$ ■

On interpretera géométriquement le résultat.

2.5 Le théorème de l'angle moitié

Si A, B et M sont trois points distincts du plan, d'affixes respectifs z_A, z_B et z_M, alors le complexe $Z = \dfrac{z_B - z_M}{z_A - z_M}$ a pour module le rapport des distances $\dfrac{MB}{MA}$ et pour arguments les mesures de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$. Bien des questions d'angles et de distances dans le plan peuvent alors se traiter "en passant par les complexes".

EXERCICE 5 *Soient A, B, M trois points situés sur un cercle centré en Ω. On note θ_M (resp. θ_Ω) une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (resp. $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$). Montrer que $\theta_\Omega = 2\theta_M [2\pi]$.*

SOLUTION : Les translations, rotations, ou homothéties de centre Ω ne changent pas la nature du problème. On peut donc se placer dans le cas d'un cercle de centre O, de rayon 1, avec A d'affixe 1. On peut alors écrire $B(\mathrm{e}^{i\alpha})$ et $M(\mathrm{e}^{i\varphi})$. Une mesure de θ_M est l'argument de $\dfrac{\mathrm{e}^{i\alpha} - \mathrm{e}^{i\varphi}}{1 - \mathrm{e}^{i\varphi}}$, qui est de la forme $k\mathrm{e}^{i\alpha/2}$ avec $k \in \mathbb{R}$ (attention, k n'est pas forcément positif...), etc...

REMARQUE 4 Du résultat précédent, on déduit facilement que si A, B, C et D sont 4 points distincts d'un cercle, alors les angles $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ sont égaux modulo π. En fait, il y a équivalence, mais le calcul précédent ne fonctionne plus du tout. On est obligé de faire de la géométrie ! Attendre quelques mois...

3 Equations algébriques sur $\mathbb{C}$

3.1 Equation $z^2 = z_0$

PROPOSITION 8 *Si $z_0 \neq 0$, l'équation en z $z^2 = z_0$ admet exactement deux solutions distinctes.*

PREUVE : C'est évident (?) via la forme exponentielle de z_0, mais en pratique, on peut déterminer une forme algébrique des solutions. On cherche z sous la forme $x + iy$. Déjà, $x^2 - y^2 = \operatorname{Re} z_0$ et $x^2 + y^2 = \sqrt{|z_0|}$, ce qui donne la valeur *nécessaire* de x^2 et y^2. On peut conclure grâce au *signe* de xy qui est celui de $\operatorname{Im} z_0$. ■

REMARQUES 5
- On peut souvent prévoir et/ou vérifier le résultat obtenu par des considérations approximatives de module et d'argument : faire un dessin !
- On rappelle que la fonction $\sqrt{}$ n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$ (même si on peut l'étendre à $\mathbb{C}$ de façon très peu satisfaisante, ou bien à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_*^-$ de façon plus naturelle). Il est donc **BIEN ENTENDU** exclu d'écrire $\sqrt{z_0}$ en pensant "une solution de $z^2 = z_0$" (tout simplement pour une raison d'unicité).

EXEMPLE 2 *On traitera les cas où $z_0 \in \{i, 1+i, 3-4i, 1+2i\}$.*

3.2 Racines d'un trinôme du second degré

PROPOSITION 9 *Soit $P = aX^2 + bX + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. On définit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de P.*
- *Si $\Delta \neq 0$, alors P admet exactement deux racines complexes distinctes $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$, où δ est l'un des deux complexes tels que $\delta^2 = \Delta$.*
- *Si $\Delta = 0$, alors P admet exactement une racine complexe (dite "double") $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.*

PREUVE : C'est la même chose que dans le cas réel : on met le trinôme sous forme réduite (où z n'apparaît qu'une seule fois). ■

EXEMPLE 3 *Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $z^2 - 3iz - 3 + i = 0$.*

SOLUTION : Le discriminant vaut $\Delta = 3 - 4i = (1-2i)^2$, donc il y a deux racines : $z_1 = 1+i$ et $z_2 = -1+2i$.

EXERCICE 6 Très important
Déterminer les racines complexes de $X^2 - 2\cos\theta X + 1$ (θ est un réel fixé).

EXERCICE 7 *ω est un complexe fixé : déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que*

$$z^2 - (2 + i\omega)z + (i\omega + 2 - \omega) = 0.$$

3.3 Racines de l'unité

THÉORÈME 1 *Soit n un entier strictement positif. L'équation $z^n = 1$ admet exactement n solutions ("racines n-ième de l'unité"), qui sont :*

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{2ik\pi/n} \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

PREUVE : On CHERCHE les solutions sous la forme $\rho e^{i\theta}$. ■

Exemple 4 *On représentera sur le cercle unité les racines n-ièmes de l'unité, pour $3 \leq n \leq 6$.*

Remarques 6

- Le résultat précédent ne dit pas que $e^{2i.1515\pi/7}$ n'est pas une racine 7-ième de l'unité ...
- On note usuellement $j = e^{2i\pi/3}$ (contrairement aux physiciens, attention ...). Si $j^3 = 1$, il est par contre grotesque d'écrire $j = 1^{1/3}$ (de même que $i = (-1)^{1/2}$). La notation a^b n'a de sens que pour $a \in \mathbb{R}_*^+$ et $b \in \mathbb{C}$, ou $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{Z}$.

Proposition 10 *Soit n un entier strictement positif et z_0 un complexe* ***non-nul*** *dont un argument est θ_0. L'équation $z^n = z_0$ admet exactement n solutions, qui sont :*

$$\left\{ |z_0|^{1/n} \, e^{(2ik\pi+\theta_0)/n} \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Remarque 7 En théorie comme en pratique, on trouve une première solution, et on en déduit les autres par multiplication par les racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 8 *Déterminer et représenter les "racines cubiques" de -1 (solutions de $z^3 = -1$). Même chose avec les "racines quatrièmes" de $-7 + 24i$ (donner des formes algébriques).*

Grâce au théorème 1, on établira sans mal la :

Proposition 11 *Soit n un entier ≥ 2. La somme des racines n-èmes de l'unité est nulle.*

O est donc le centre de gravité du polygone régulier à n sommets dont les affixes sont les racines n-ièmes de l'unité.

4 Trigonométrie et géométrie

4.1 Quelques formules trigonométriques

On profite de ce chapitre pour rappeller (et surtout établir) un formulaire de trigonométrie. On part des formules donnant le cosinus et le sinus d'une somme :

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

(en cas de doute, on peut les retrouver à partir de la relation $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$). Par parité (resp. imparité) de la fonction cosinus (resp. sinus), on en déduit :

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

En posant $y = x$, on obtient également :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1,$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Puis

$$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}, \quad \text{et :} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

4.2 Sommes de cosinus et de sinus

a et b étant deux réels fixés, "si par miracle on peut trouver x et y tels que $x+y=a$ et $x-y=b$, alors on aura une formule simple pour $\cos a+\cos b$". En cherchant à voir si le miracle à lieu, on obtient effectivement les formules suivantes :

$$\cos a+\cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2},$$
$$\sin a+\sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

PROPOSITION 12 *Si $\alpha,\beta,\theta\in\mathbb{R}$, il existe $R\geq 0$ et $\varphi\in\mathbb{R}$ (ne dépendant que de α et β) tels que :*

$$\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta = R\cos(\theta-\varphi).$$

PREUVE : On factorise $R=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, et on se souvient que si $a^2+b^2=1$, alors il existe φ tel que $a=\cos\varphi$ et $b=\sin\varphi$. ■

Dans le résultat qui suit, ce n'est pas la formule qu'il faut retenir, mais l'idée de la preuve : se donner deux réels, c'est se donner un complexe ...

PROPOSITION 13 *Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et θ un réel qui n'est pas de la forme $2k\pi$:*

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta = \frac{\cos n\theta/2\sin(n+1)\theta/2}{\sin\theta/2}\quad \textit{et}\quad \sum_{k=0}^{n}\sin k\theta = \frac{\sin n\theta/2\sin(n+1)\theta/2}{\sin\theta/2}\cdot$$

PREUVE : C_n+iS_n est la somme des premiers termes d'une suite géométrique. ■

EXERCICE 9 *Soient $\theta,h\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer des formules analogues pour :*

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\theta+kh)\quad \textit{et}\quad \sum_{k=0}^{n-1}\sin(\theta+kh).$$

Il est interdit d'utiliser les formules de la proposition précédente.

4.3 Passage par la tangente de l'angle moitié

Les formules qui suivent seront à connaître un jour ou l'autre : autant les apprendre dès maintenant...

PROPOSITION 14 *Si $\theta\in\mathbb{R}$ n'est pas de la forme $(2k+1)\pi$, alors en posant $t=\tan\frac{\theta}{2}$, on a :*

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},$$

et si θ n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$:

$$\tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}\cdot$$

PREUVE : On écrit $\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$, puis $\tan^2=\frac{1-\cos^2}{\cos^2}$, donc $(t^2+1)\cos^2\frac{\theta}{2}=1$, puis $\cos\theta=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, et

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}=\frac{2t}{1+t^2}\cdot$$

On termine en notant que $\tan t=\frac{\sin t}{\cos t}\cdot$ ■

Remarque 8 Pour retenir les formules :
- on se souvient des trois termes $2t$, $1+t^2$ et $1-t^2$;
- on sait que le cosinus et le sinus sont toujours définis. Les dénominateurs ne peuvent donc pas s'annuller : il s'agit forcément de $1+t^2$;
- pour le choix du numérateur ($2t$ vs $1-t^2$) entre le sinus et le cosinus, on utilise la parité de cos et l'imparité de sin.

4.4 Transformations du plan

En confondant le plan et $\mathbb{C}$ avec l'analogie "complexe z = point d'affixe z", on peut associer à une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ une application du plan dans lui-même. Avec cette convention :
- Si $z_0 = x_0 + iy_0$, $z \mapsto z + z_0$ correspond à la translation de vecteur $x_0 \overrightarrow{i} + y_0 \overrightarrow{j}$.
- Si $k \in \mathbb{R}^*$, $z \mapsto kz$ correspond à l'homothétie de centre O et de rapport k.
- Si $\theta \in \mathbb{R}$, $z \mapsto \mathrm{e}^{i\theta} z$ correspond à la rotation de centre O et d'angle θ.

Remarques 9
- Le *groupe* constitué des homothéties et translations du plan correspond donc aux applications de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
- $z \mapsto \overline{z}$ correspond à la reflexion par rapport à l'axe (Ox). De même, il y a correspondance entre les réflexions du plan et les applications de la forme $z \mapsto a\overline{z} + b$ où $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$