Langages rationnels

1 Généralités sur les mots et langages

EXERCICE 1 Soient L, M et N trois langages sur un alphabet A. Comparer les langages suivants (inclusions, égalité...) :
- $L.(M \cap N)$ et $L.M \cap L.N$;
- $L.(M \cup N)$ et $L.M \cup L.N$;
- $(\overline{L})^*$ et $\overline{L^*}$;
- L^* et $(L^*)^*$;
- $(L \cup M)^*$ et $(L^*M^*)^*$;
- $L^* + M^*$ et $(L + M)^*$.

EXERCICE 2 Ecrire des fonctions caml permettant de tester si un mot est préfixe (resp. suffixe, sous-mot, facteur) d'un autre mot.

Les mots seront des chaînes de caractères (`string`), et les fonctions de signature `string -> string -> bool`. On donnera la complexité des différentes procédures (en termes de...).

EXERCICE 3 Soient $w_1, w_2 \in A^*$. Montrer qu'il existe un unique $w_3 \in A^*$ tel que $w_1^* \cap w_2^* = w_3^*$.

EXERCICE 4 *Commutant d'un mot*

1. Deux lemmes préliminaires :
   - *Lemme de Levy* : Si $x, y, u, v \in A^*$ vérifient $xy = uv$, alors il existe un mot $z \in A^*$ tel que ($u = xz$ et $y = zv$) ou ($x = uz$ et $v = zy$).
   - Un mot est dit *primitif* lorsqu'il n'est puissance > 0 d'aucun autre. Montrer que tout mot (non vide) s'écrit de façon unique u^k avec u primitif et $k > 0$.
2. - Soient x et y deux mots de A^* tels que $xy = yx$. Montrer qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}$ et $w \in A^*$ tels que $x = w^p$ et $y = w^q$. On pourra utiliser l'exercice précédent.
   - On fixe $w \in A^*$. Préciser la nature de l'ensemble des mots commutant avec w.

EXERCICE 5 Ecrire une fonction caml prenant en entrée un mot (sous forme d'une chaine de caractère (`string`) et retournant la liste de ses préfixes (resp. suffixes, facteurs, sous-mots).

EXERCICE 6 *Mots de Fibonacci*

On définit les mots de Fibonacci sur l'alphabet $\{a, b\}$ par $f_0 = \varepsilon$, $f_1 = a$, $f_2 = b$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$: $f_{n+2} = f_{n+1}f_n$.

1. Déterminer la longueur de f_n.

2. Combien f_n contient-t-il de a et de b ?
3. f_n contient-t-il plusieurs a ou b consécutifs (préciser. . .) ?
4. (Pour les 5/2) L'ensemble $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est-il rationnel ?

2 Langages rationnels

EXERCICE 7 La classe des langages rationnels est stable par concaténation. En est-il de même d'un langage rationnel ?

EXERCICE 8 Montrer que le langage associé à $(a^*b)^* + (b^*a)^*$ est A^*.

EXERCICE 9 Comparer les langages associés à $(A^{1515})^*$ et $(A^*)^{1515}$.

EXERCICE 10 Montrer que le langage (sur un alphabet A fixé) constitué des mots de longueur non divisible par 1789 est rationnel.

EXERCICE 11 Montrer que les langages suivants sont rationnels (donner uneexpression rationnelle) :
- $(b^*a^2b^*)^* \cap (a^*b^2a^*)^*$;
- le complémentaire de A^*b ;
- le complémentaire de $(A^2)^*$.

EXERCICE 12 Soit $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $(L_n = Lb^n$ et $L_{-n} = a^n L$.

1. Montrer que si M est un langage rationnel inclus dans un L_n $(n \in \mathbb{Z})$, alors M est fini.
2. Montrer que L n'est pas rationnel.
3. Ecrire une fonction caml qui détermine si un mot est dans L.

EXERCICE 13 Montrer que le langage constitué des lignes de commentaires en caml est rationnel (sur un alphabet à préciser). On donnera une expression rationnelle (plus un automate, pour les 5/2).

Même chose en pascal et en C.

EXERCICE 14 Ici, $A = \{a, b\}$.

1. Montrer qu'il existe un unique langage L tel que $L = aL + b$, et qu'il s'agit de a^*b.

   Cela dit, “il suffisait de résoudre l'équation $L = aL + b$” de la façon suivante : $(1 - a)L = b$, or l'inverse de $1 - a$ est $1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots$, donc $L = (1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots)b = a^*b$.

   Magique, non ?
2. Si K et L sont deux langages, avec $\varepsilon \notin K$, montrer que l'équation $X = KX + L$ admet pour unique solution $X = K^*L$.
3. (facultatif) Donner la forme des solutions de cette même équation si $\varepsilon \in K$.

4. On suppose que les langages $K_{i,j}$ et L_i sont rationnels, avec $\varepsilon \notin K_{i,j}$ pour $i, j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que le système "n équations n inconnues" :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad X_i = K_{i,1}X_1 + \cdots + K_{i,n}X_n + L_i$$

admet une unique solution $(X_1, \ldots, X_n)$, où les X_i sont rationnels. Les "solutions d'un système linéaire sont donc rationnelles par rapport aux coefficients". C'est moral ?

5. Exemple : résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L_1 & = & aL_2 \\ L_2 & = & bL_3 + \varepsilon \\ L_3 & = & aL_2 \end{array} \right.$$

Les 5/2 donneront même l'origine de cet exemple ...

EXERCICE 15 Dans cet exercice, on s'intéresse à la représentation des entiers en une base b donnée, ce qui permet de voir un entier comme un mot sur un alphabet à b lettres. Déterminer si les ensembles constitués des (représentations des) entiers suivants sont rationnels :

– entiers divisibles (resp. non divisibles) par 10 (en base 10) ;
– entiers divisibles (resp. non divisibles) par 5 (en base 10) ;
– entiers divisibles (resp. non divisibles) par 3 (en base 10) ;
– entiers divisibles (resp. non divisibles) par 7 (en base 10) ;
– et enfin, beaucoup plus difficile (pour les 3/2 : les 5/2 sourient) : entiers divisibles (resp. non divisibles) par 1515 **en base 7.**

Reprendre l'exercice avec les "représentations inversées" (en base 10, on représente le résultat de $7 * 7$ par 94).