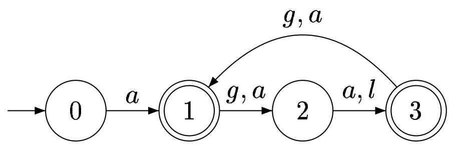
Automates finis

EXERCICE 1 Déterminer une formule rationnelle décrivant le langage reconnu par l'automate suivant :



EXERCICE 2 Donner des automates finis (déterministes) reconnaissant les langages définis par les expressions rationnelles suivantes ($A = \{a, b\}$) :
- $(aab + aa + aab)^*$;
- a^*b ;
- $\varepsilon + (a + aab)^* + a^*(aab)^*$.

EXERCICE 3 Donner un automate fini déterministe reconnaissant les lignes de commentaires en Caml (l'alphabet est l'ensemble des caractères ASCII raisonnables).

EXERCICE 4 Montrer que $\{w \in A^*;\ |w|_a = |w|_b\}$ est n'est pas reconnaissable ($|w|_\alpha$ désigne le nombre de lettres α présentes dans w).

EXERCICE 5 Soit $A = \{a, b\}$. Construire un automate déterministe reconnaissant le langage constitué des mots contenant un nombre pair de a, et un nombre de b non divisible par 3.

EXERCICE 6 Donner un automates déterministe reconnaissant les mots sur $A = \{1, 2, 3\}$ formant une suite (finie) croissante.

EXERCICE 7 *Reprise d'un exercice précédent*

On s'intéresse à la représentation des entiers en une base b donnée, ce qui permet de voir un entier comme un mot sur un alphabet à b lettres. Déterminer des automates reconnaissant les ensembles constitués des (représentations des) entiers suivants :
- entiers divisibles (resp. non divisibles) par 10 (en base 10) ;
- entiers divisibles (resp. non divisibles) par 5 (en base 10) ;
- entiers divisibles (resp. non divisibles) par 3 (en base 10) ;
- entiers divisibles (resp. non divisibles) par 7 (en base 10) ;
- entiers divisibles (resp. non divisibles) par 1515 **en base 7.**

Reprendre l'exercice avec les "représentations inversées" (en base 10, on représente le résultat de $7 * 7$ par 94).

EXERCICE 8 Montrer que le langage $\{a^p b^q \mid p, q \in \mathbb{N}\}$ est reconnaissable.

Exercice 9 Montrer que $\{a^p b^p \,|\, p \in \mathbb{N}\}$ n'est pas reconnaissable (on supposera qu'un automate fini déterministe reconnaît ce langage, et on "séparera" une infinité d'états).

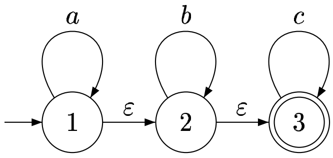
Même chose avec le langage constitué des palindromes sur un alphabet non réduit à un singleton, et avec le langage des phrases bien parenthèsées sur $A = \{a, (,)\}$.

Exercice 10 Ici, $A = \{a, b, c\}$.

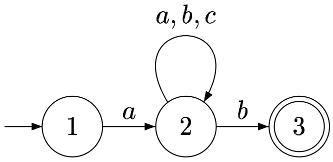
- Montrer que $\{wcw \mid w \in \{a, b\}^*\}$ n'est pas reconnaissable.
- Montrer en revanche que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\{wcw \mid w \in \{a, b\}^n\}$ est reconnaissable, et donner le nombre minimal d'états d'un automate déterministe complet reconnaissant ce langage.

Exercice 11 Donner une expression rationnelle correspondant aux langages reconnus par les automates suivants, puis les déterminiser (si besoin est) :

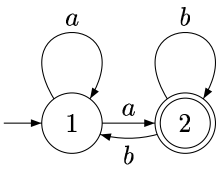
- $A = \{a, b, c\}$



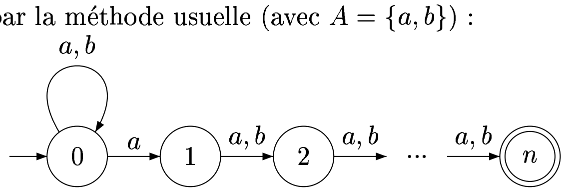
- $A = \{a, b, c\}$



- $A = \{a, b\}$

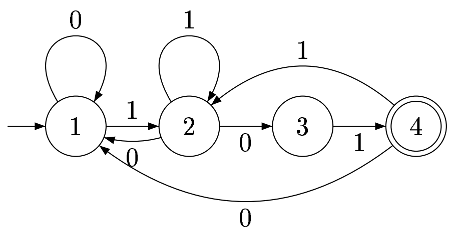


Exercice 12 Donner le nombre d'états de l'automate suivant une fois déterminisé par la méthode usuelle (avec $A = \{a, b\}$) :



Question subsidiaire : montrer qu'il n'existe pas d'automate déterministe complet reconnaissant le même langage avec strictement moins d'états.

Exercice 13 Donner une expression rationnelle du langage reconnu par l'automate suivant ($A = \{0, 1\}$) :



EXERCICE 14 Montrer que le langage $L = \{a^p b^q c^{p+q},\ p, q \in \mathbb{N}\}$ n'est pas rationnel (sur $A = \{a, b, c\}$). Par contre, donner un automate reconnaissant $\{a^p b^q c^r;\ r = a + b \pmod 3\}$.

EXERCICE 15 Montrer que tout langage infini L contient un langage irrationnel L'.

Proposer un moyen "constructif" fournissant un flux de ce langage L', à partir d'un oracle fournissant à la demande un mot de L de taille $\geq n$.

EXERCICE 16 Soit L un langage. Comparer L^2 et $\{w^2 \,|\, w \in L\}$. Si L est rationnel, ces deux derniers langages le sont-ils aussi ?

EXERCICE 17 Si $w_1 = a_1 \ldots a_p$ et $w_2 = b_1 \ldots b_q$, le mélange (*shuffle*) de w_1 et w_2, noté $w_1 ⧢ w_2$ est l'ensemble des mots de la forme $c_1 \ldots c_{p+q}$, où chaque c_i vaut $a_{\varphi(i)}$ ou $b_{\psi(i)}$, avec φ et ψ strictement croissantes[1].

Si L_1 et L_2 sont deux langages, leur mélange est la réunion des $w_1 ⧢ w_2$, pour $w_1 \in L_1$ et $w_2 \in L_2$.

Montrer que si L_1 et L_2 sont reconnaissables, alors $L_1 ⧢ L_2$ est également reconnaissable.

EXERCICE 18 *Barman et pieuvre*

Un barman aveugle avec des gants de boxe joue au jeu suivant avec un client : quatre verres sont placés aux 4 directions d'un plateau circulaire (N,E,S,O). Ils peuvent être à l'endroit ou à l'envers, et le but du jeu, pour le barman, consiste à les mettre tous à l'endroit ou tous à l'envers : le client arrête alors le jeu. A chaque étape, le client peut tourner le plateau, puis le barman retourne un ou deux verres (adjacents ou opposés).

Montrer que le barman a une tactique gagnante, et déterminer le nombre de coups minimal dans le pire des cas.

A l'adresse `/http://www.math.psu.edu/melvin/stuff/bbg.html`, *on trouvera une très belle extension :*

We shall consider an even more difficult problem. Suppose we replace the four glasses with n glasses placed at the vertices of a regular n-gon and replace the bartender with a blind octopus wearing heavy gloves on each of his n/2 hands. We shall show that the octopus has a strategy for success iff n is a power of 2

[1] φ et ψ sont des applications partielles...On peut également définir $w_1 ⧢ w_2$ comme l'ensemble des mots de la forme $m_1 \ldots m_{2k}$, avec $m_i \in A^*$ tels que $w_1 = m_1 m_3 \ldots m_{2k-1}$ et $w_2 = m_2 m_4 \ldots m_{2k}$.

Exercice 19 On fixe ici un mot $m = a_1 \dots a_k$ ("motif" que l'on va chercher dans un texte). Pour $w \in A^*$, $S_m(w)$ désigne le plus grand suffixe de w qui est un préfixe de m.

- Ecrire une fonction Caml prenant en entrée deux chaines m et w, et retournant $S_m(w)$.
  On construit un automate $\mathcal{A}_m$ de la façon suivante : les états sont les préfixes de m (il y en a $k+1$; on note Q cet ensemble d'états) ; l'état initial est ε, et si $e \in Q$ et $\alpha \in A$, on définit $\delta(e, \alpha) = S_m(e\alpha)$.
- Construire $\mathcal{A}_m$ lorsque $m = aaaaab$, $m = abbbbb$, et $m = abcdabce$.
- Que représente l'état dans lequel on se trouve après avoir lu un mot ? Intérêt de la chose ?
- Question subsidiaire : construire l'automate en temps linéaire (retour sur cette question dans quelques semaines).

Exercice 20 En pseudo-code, écrire des programmes testant :

- l'égalité de deux langages définis par des expressions rationnelles ;
- l'inclusion de $\mathcal{L}(e_1)$ dans $\mathcal{L}(e_2)$;
- l'égalité $\mathcal{L}(e_1) = A^*$.

Exercice 21 Mots de de Brujin et problèmes de digicode (? !)

Pour occuper les 5/2 (aurait pû constituer le squelette d'un problème...)

Un mot de de Brujin d'ordre k sur $A = \{a, b\}$ est un mot où apparaît une et une seule fois tout mot de longueur k.

- Donner la longueur d'un (éventuel) mot de de Brujin d'ordre k.
- Montrer l'existence d'un mot de de Brujin d'ordre 1, puis d'ordre 2.
- Soit $k \geq 2$. En considérant un automate dont les états sont les mots de A^{k-1} et les transitions $(\alpha v, \beta, v\beta)$ pour $\alpha, \beta \in A$ et $v \in A^{k-2}$, montrer l'existence de mots de de Brujin d'ordre k.
  On pourra noter que les états du graphe ont un degré entrant et sortant égaux, et en déduire qu'il existe un circuit eulérien (qui passe par toutes les transitions une et une seule fois...)
- Donner un mot de de Brujin d'ordre 3.
- Montrer que le nombre de mots de de Brujin d'ordre k est exponentiel en k.
- Justifier le nom de l'exo.

Exercice 22 Soit L un langage rationnel. On pose $\sqrt{L} = \{u \in A^* \,;\, u^2 \in L\}$, et on va montrer que $\sqrt{L}$ est rationnel. On note pour cela $L_1, \dots, L_k$ les résiduels de L, et on considère la relation sur les mots :

$$u \sim v \iff \forall i \in [\![1, k]\!],\ u^{-1}L_i = v^{-1}L_i.$$

- Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
- Montrer que si $u \sim v$, alors $u^{-1}\sqrt{L} = v^{-1}\sqrt{L}$.
- Conclure.

Exercice 23 (D'après Mines 98)

On propose ici une autre démonstration (constructive) du résultat précédent.

- Soit $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, i, F)$ déterministe complet reconnaissant L. On définit $\mathcal{A}' = (Q^Q, A, \eta, Id, \mathcal{F})$, avec pour tout $q \in Q$, $\eta(f, \alpha)(q) = \delta\big(f(q), \alpha\big)$, et $\mathcal{F}$ est l'ensemble des $f \in Q^Q$ tels que $f(i) \in F$.

Montrer que $\mathcal{A}'$ reconnait L.

- On part maintenant de l'automate $\mathcal{A}'$ précédent, et on définit $\mathcal{F}'$ l'ensemble des $\eta(Id, w)$, où w décrit $\sqrt{L}$.
  Montrer que $\mathcal{A}'' = (Q^Q, A, \eta, Id, \mathcal{F}')$ reconnait $\sqrt{L}$.
- Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}'$ peut être déterminé de façon constructive.
- Généraliser à $\sqrt[n]{L}$.

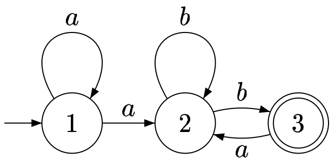
Exercice 24 (****)

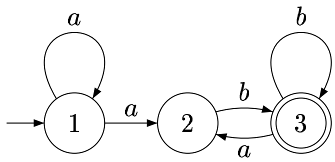
Soit L rationnel. Les langages suivants sont-ils rationnels ?

- $\{w^{|w|},\ w \in L\}$ (facile) ;
- $\{w \in A^*;\ w^{|w|} \in L\}$ (forte récompense à celui qui trouvera).

Exercice 25 Construire l'automate fini déterministe minimal complet reconnaissant $(a(ab)^*)^* + (ba)^*$ (faire la méthode de Berry-Sethi puis celle des résiduels).

Exercice 26 Montrer que les deux automates suivants reconnaissent le même langage, et sont minimaux sans être isomorphes.





Ou est le (non) problème ?