Exercices de Khôlles
Saison 2001 – 2002

Avertissement

Ces exercices sont diffusés avec l'autorisation de leurs auteurs afin d'aider les élèves qui le souhaitent à préparer des exercices complémentaires. Toute utilisation de ces exercices à des fins commerciales est prohibée.
Lorsque j'ai le temps, je mets quelques indications pour la résolution.

Table des matières

1 Notions de base, complexes et inégalités (réels)

Quinzaine du 1er au 11 Octobre 2001 : rapports non exigés, d'où le faible nombre d'exercices proposés pour cette quinzaine.

Exercice 1 (Matthieu CHAMBAUD)
Les notations sont laissées à la guise du khôllé :

- Montrer que si $g \circ f$ et f sont bijectives, alors g est bijective. Montrer de même que si $g \circ f$ et g sont bijectives, alors f est bijective.
- Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h le sont.

Exercice 2 (Moez DHARI)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $m \in \mathbb{N}$ tel que $2^m \leq n < 2^{m+1}$.

Exercice 3 (Florence FERLAY)
Pour tout $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$, on définit $x_{k,n} = \dfrac{\mathrm{C}_n^k + 1}{\mathrm{C}_{k+1}^{n+1} + 2}$. On considère $X = \{x_{k,n} \,|\, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n\}$.
- Montrer que X admet une borne inférieure et une borne supérieure.
- En utilisant des suites judicieusement choisies, trouver ces deux bornes.

Exercice 4 (Solal GUIRAND)
- Montrer : $\forall u \in \mathbb{R}^*,\ \ \ln(1+u) \geq u - \dfrac{u^2}{2}\cdot$
- En déduire qu'il existe N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \geq \dfrac{11}{5}\cdot$
- Comparer $n!$ et $\left(\dfrac{5n}{11}\right)^n\cdot$

Exercice 5 (Nicolas GUFFROY)

1. (cours) Soit f (resp. g) une application de E dans F (resp. de F dans G).
   - Montrer que si $g \circ f$ est injective (resp. surjective), alors f (resp. g) l'est aussi.
   - Montrer que si $g \circ f$ est injective (resp. surjective) et f est surjective (resp. g injective), alors g est injective (resp. f est surjective).
2. (exo) En plus des applications f et g précédentes, soit h une application de G dans E telle que $g \circ f \circ h$ est injective et $f \circ h \circ g$ est surjective. Montrer que f, g et h sont bijectives.

Exercice 6 (Leila LUTGEN, Alexandre ISAAZ)
1. (cours) Qu'est-ce qu'une fonction inversible ? Quel est le lien avec une fonction bijective ?
2. (exo) Soit $Z = \mathrm{e}^{2i\pi/7}$, $S = Z + Z^2 + Z^4$ et $T = Z^3 + Z^5 + Z^6$. *(NDLR : les dessins sont autorisés...)*
   - Montrer que S et T sont conjugués.
   - Montrer que $Im(S) > 0$.
   - Calculer $S + T$ et ST.
   - En déduire S et T.

Exercice 7 (Damien LOUBET)

1. (cours) Que se passe-t-il si $g \circ f$ est injective ? surjective ?
2. (exo) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n-1$.
   - Montrer : $E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) = E(x)$.

Exercice 8 (Benjamin PAPAZIAN)

1. (cours) Définition d'une image directe, d'une image réciproque.
2. (exo) Soit $A = \{x^2 + y^2 \mid x, y \in \mathbb{R}; xy = 1\}$. *(NDLR : il est suggeré de représenter l'ensemble des couples (x, y) vérifiant $xy = 1$)*
   - Montrer que A admet une borne inférieure que l'on déterminera
   - A possède-t-il une borne supérieure ?

Exercice 9 (Mélanie PERRUS)

1. (cours) Définition de la convergence d'une suite. Unicité de la limite, lorsqu'elle existe.
2. (exo) Etudier la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1515 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

Exercice 10 (Sophie WU)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les solutions de $\left(z^2+1\right)^{2p} - \left(z^2-1\right)^{2p} = 0$. Commenter leur nombre.

Exercice 11 (Florence LOUIS)

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\Big(1 + \frac{2}{k(k+3)}\Big)\cdot$ *On trouvera comme Maple :* $\ln 3 + \ln \dfrac{n+1}{n+3}\cdot$
2. Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ ou bien est dense dans $\mathbb{R}$...

2 Réels, début des suites

Quinzaine du 16 au 26 Octobre 2001.

Exercice 12 (Eric ABOUAF)

1. (cours) Suites adjacentes : définition ; énoncé et démonstration du théorème les concernant.
2. (exo) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n = 0,11...1$ (n décimales égales à 1). Montrer que la suite (u_n) converge.

Exercice 13 (Jean-Baptiste BARTH)

Etude de la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = 6 + \sqrt{u_n} \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

Exercice 14 (Jean-Pascal BIGOT, Clément FAUCHERRE)

Pour $n \geq 1$, on définit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. En étudiant v et w, montrer que u converge.

Exercice 15 (Laurent BLANC)

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel positif, noté u_n, solution de $x^n + x - 1 = 0$.
- Montrer que (u_n) converge, PUIS calculer sa limite.

Exercice 16 (Nicolas BLOUMINE)

1. Donner un équivalent en $+\infty$ de la suite définie par $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{n^2 + u_n^2} \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$
2. Soit (u_n) une suite géométrique strictement positive de raison q. On pose $v_n = \left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right)^n$. Donner un équivalent simple de v_n.

Exercice 17 (Jérome BOLLARD)

- Montrer que pour tout $t > 1$, $\dfrac{1}{t-1} \leq \ln(1+t) - \ln t \leq \dfrac{1}{t}\cdot$
- Soit $h_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\cdot$ Montrer : $h_n \sim \ln n$.

Exercice 18 (Amandine BUFFAZ)

Soit u la suite définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 4}{u_n + 3}$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on ne s'intéressera pas aux problèmes de définition d'une telle suite).

- Montrer que la fonction $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{-3\} \mapsto \dfrac{3z-4}{z+3}$ admet exactement deux points fixes complexes z_1 et z_2.
- En considérant la suite v de terme général $v_n = \dfrac{u_n - l_1}{u_n - l_2}$, trouver une expression simple de u_n en fonction de n.

Exercice 19 (Florent CARUZZI)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $h_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\cdot$

- Montrer que $h_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (on pourra considérer $h_{2n} - h_n$).
- Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_n = h_n - \ln n$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}\cdot$ Monotonie ? En déduire que $h_n \sim \ln n$.

Exercice 20 (Matthieu CHAMBAUD)

Etudier la suite u de terme général $u_n = \sin n$.
On montrera que u ne tend pas vers $+\infty$ ou $-\infty$, puis on montrera par l'absurde qu'elle ne converge pas, en considérant des suites extraites judicieuses.

Exercice 21 (Tiphanie CHATAIL)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver les $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $\sum_{k=0}^{n} \sin kx = 0$.

Exercice 22 (Marie CLAIRO)

On définit une suite u par : $\begin{cases} u_0 = 1515 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

- Etude de u.
- En étudiant $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$, déterminer un équivalent simple de u_n.

Exercice 23 (Violette COQUATRIX-HENRIOT)

Etude de la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 2001 \\ u_{n+1} = \ln(1+u_n) \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

Exercice 24 (Julien CORDOBA)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit $P_n(x) = x^n + x - 1$.

1. Montrer que P_n admet une unique racine dans $]-1, 1[$, notée x_n dans la suite.
2. Montrer que (u_n) est croissante, puis qu'elle converge vers 1.

Exercice 25 (Brice COUTURIER)

1. (cours) Montrer que si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l_1$ et $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l_2$, alors $u_n v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l_1 l_2$. Montrer que si (u_n) converge, alors elle est bornée.
2. (exo) Soit u la suite de terme général (pour $n \geq 1$) : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^k$. Trouver un équivalent simple de cette suite.

Exercice 26 (Julien DESMONT)

1. (cours) Suites adjacentes : définition ; énoncé et démonstration du théorème les concernant.
2. (exo) Etudier la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 6 + u_n^3 \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

Exercice 27 (Alvaro FERNANDEZ)

Soient u et v les deux suites de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\cdot$

1. Montrer que (v_n) converge.
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $x - \dfrac{x^3}{3} \leq \sin x \leq x$.
3. En déduire la nature de (u_n).

Exercice 28 (Sébastien GILIBERT)

1. Etude de u définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n + 1} - 1 \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$
2. Etude de u et v définies pour $n \geq 1$ par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}\cdot$

Exercice 29 (Bénédicte GILLOT)

Montrer que si (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{n^2}) convergent, alors u également.

Exercice 30 (Solal GUIRAND)

Soit $\alpha \geq -2$. Etudier la suite définie par $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

Exercice 31 (Nicolas GUFFROY)

Etudier (avec l'aide de Maple) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1/2 \\ u_{n+1} = 3u_n(1 - u_n) \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

Exercice 32 (Alexandre ISAAZ, François LECOCQ)

1. Etude de u définie par $\begin{cases} u_0 = 1/3 \\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n) \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$
2. $\sqrt[n]{\operatorname{ch}(n+1) - \operatorname{sh}(n-2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$? *(Réponse : $\to e$)*

Exercice 33 (Mickaël KEPENEKIAN)

Etude de u définie par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{-u_n} \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

Indications :

- *Soit $f : x \mapsto e^{-x}$. Montrer que f admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}^+$, ainsi que $f \circ f$, puis que ces points fixes sont égaux.*
- *Etudier $v_n = u_{2n}$, qui vérifie une relation de récurrence simple... le comportement de $w_n = u_{2n+1} = f(v_n)$ s'en déduit simplement du fait de la décroissance de f.*

Exercice 34 (Priscille LANEYRIE, Moez DHARI)

1. (cours) Que dire d'une suite croissante ?
2. (exo) Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on pose $u_n = \cos\left(\pi n^2 \ln \frac{n}{n-1}\right)\cdot$ Donner un équivalent simple et la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 35 (Jean-François LEFEBVRE)

1. (cours) Définition de $u_n \sim v_n$, etc...
2. (exo 1) Montrer que si $u_n \sim v_n$ et $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.
3. (exo 2) (cf M. Kepenekian) Etude de u définie par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{-u_n} \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

Exercice 36 (Jaime LEZAMA)

1. (cours) Que dire des suites croissantes ?
2. (exo) Equivalent simple de u_n, avec $\begin{cases} u_0 = 15 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

Exercice 37 (Damien LOUBET)

Limite éventuelle de $v_n = \dfrac{a_n \ln n}{a_n^2 + 1}$ lorsque $n \to \infty$, avec a_n le nombre de chiffres de la représentation décimale de n.

Exercice 38 (Florence LOUIS)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = \displaystyle\prod_{p=0}^{n} \cos \frac{\pi}{2^p}$ et $v_n = u_n \sin \dfrac{\pi}{2^n}\cdot$ Montrer que la suite v est géométrique et en déduire les valeurs de u_n et v_n, puis que u converge.

Exercice 39 (Amel LUU)

Soient p et q deux réels vérifiant $0 < q < p$.On fixe deux réels α et β avec $\alpha < \beta$, et on définit deux suites u et v en posant $u_0 = \alpha$, $v_0 = \beta$, et pour tout $n \geq 0$: $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{pu_n + qv_n}{p+q} \\ v_{n+1} = \dfrac{pv_n + qu_n}{p+q} \end{cases}$

Montrer que u et v convergent vers une même limite, puis déterminer cette limite.
On pourra montrer que pour tout n, $u_n \leq v_n$, puis : u est croissante et v décroissante. Pour la valeur de la limite commune, on pourra noter que $u+v$ est une suite constante.

Exercice 40 (Mélanie PERRUS)

1. Etudier la suite u de terme général
$$u_n = \frac{E(x) + E(4x) + E(9x) + \cdots + E(n^2x)}{n^\alpha},$$
avec $x, \alpha \in \mathbb{R}$.
2. Trouver un équivalent simple (lorsque $n \to +\infty$) de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{k+1}{k}}$ (on poura utiliser Césaro).

Exercice 41 (Eric PIERRE)

1. Etude de la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 2001 \\ u_{n+1} = \sin u_n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$
2. Etude de la suite v de terme général $v_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\sin x)^n dx$.

Exercice 42 (Fabrice ROLANDO)

Montrer que la suite de terme général $u_n = (\mathrm{C}_{2n}^n)^{1/n}$ est convergente.

Sur les feuilles de TD, c'est fait en utilisant Césaro. Le point de vue pris ici est moins direct, mais très intéressant : tout d'abord, une première comparaison somme/intégrale permet d'obtenir $\ln n - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$*. Ensuite, une nouvelle comparaison somme/intégrale nous amène à :* $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + k/n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\ln 2 - 1$.

Exercice 43 (Sylvère RUELLAN)

Linéariser $\cos^2 \dfrac{\pi}{34} + \cos^2 \dfrac{3\pi}{34} + \cdots + \cos^2 \dfrac{31\pi}{34}\cdot$
On trouvera $8 - \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{17}\cdot$

Exercice 44 (Alexandre VILLEDIEU)

1. (cours) Définition de la convergence d'une suite et unicité de la limite lorsqu'elle existe.
2. (exo) Donner un équivalent simple de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k}\cdot$

Exercice 45 (Paul WILCZYNSKI)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = \dfrac{n}{(n)^{1/n}}$: montrer que cette suite admet une limite (à déterminer).

Considérer $\ln u_n$ *: grâce à une comparaison somme/intégrale, on pourra établir l'encadrement*

$$n\ln n - n + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \ln k \leq (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2.$$

Remarque : *on pourra retrouver (sans arnaquer) ce résultat avec l'équivalent de Stirling.*

Exercice 46 (Sophie WU)

1. On définit une suite u par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{n}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$ Caluler u_n et déterminer sa limite éventuelle, en cherchant b judicieusement de sorte que la suite de terme général $v_n = u_n + nb$ soit assez simple...
2. Donner un équivalent simple de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{(2k+1)/k} \cos\Big((2k^2+1)\frac{\pi}{k}\Big)$ (après avoir simplifié, on pourra utiliser Césaro).

3 Suite des suites ; continuité

Quinzaine du 5 au 15 Novembre 2001

Exercice 47 (Eric ABOUAF)

1. Montrer que si f et g sont lipshitziennes sur un segment $[a,b]$, alors fg l'est aussi. *On commencera par le cas où f et g sont dérivables, de dérivées bornées (par exemple continues).*
2. Dans le même esprit (en commençant par le cas dérivable PUIS en traitant le cas général) : on suppose f croissante et g décroissante. Donner une CS simple sur les signes de f et g pour avoir fg décroissante.

Exercice 48 (Jean-Baptiste BARTH, Solal GUIRAND)

Déterminer les applications $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $f(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$, et $f\big(xf(y)\big) = yf(x)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 49 (Jean-Pascal BIGOT)

1. (cours) Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
2. (exo 1) $\dfrac{\sin\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n} - \mathrm{e}^{-1/n}}{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^3 - \left(\cos\frac{1}{n}\right)^4 + \operatorname{th}\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ?$ *(On trouvera -1)*
3. (exo 2) Etude de u définie par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{-u_n} & \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

   Indication : *voir aussi M. Kepenekian en 2eme quinzaine. Le point de vue qui a été pris a consisté à localiser la suite dans $[u_2, 1]$, puis à utiliser l'inégalité des accroissements finis après avoir majoré $|f'|$ sur ce segment.*

Exercice 50 (Laurent BLANC)

Etudier la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2+u_n} & \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

Exercice 51 (Nicolas BLOUMINE)

$$\frac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x} \underset{x\to\pi/3}{\longrightarrow} ?$$

Exercice 52 (Jérome BOLLARD)

1. Limite éventuelle de $\left(2\sin\frac{1}{n}+\frac{3}{4}\cos n\right)^n$ lorsque $n\to\infty$.
2. Limite éventuelle de $xE(x)$ lorsque $x\to 0$.

Exercice 53 (Valentine BONNET)

$$\sqrt[n]{\mathrm{C}_{2n}^{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ?$$

On pourra montrer : $\dfrac{\mathrm{C}_{2n+2}^{n+1}}{\mathrm{C}_{2n}^{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 4$*... et ne pas terminer n'importe comment! (penser à Césaro)*

Exercice 54 (Florent CARUZZI)

Etudier u définie par $\begin{cases} u_0 = 1/2 \\ u_{n+1} = (1-u_n)^2 \quad \text{pour tout } n\geq 0 \end{cases}$

(on étudiera v et w définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$)

Exercice 55 (Matthieu CHAMBAUD)

1. Etude de u définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \ln(1+u_n) \quad \text{pour tout } n\geq 0 \end{cases}$
2. $xE(1/x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} ?$

Exercice 56 (Nicolas CHAMPAGNE)

Montrer que $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ admet une limite lorsque $n\to\infty$. *On pourra établir l'encadrement*

$$\forall u\geq 0, \qquad u-\frac{u^2}{2}\leq \ln(1+u)\leq u.$$

Exercice 57 (Tiphanie CHATAIL)

Donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 58 (Marie CLAIRO)

Etudier la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{1+u_n}} \quad \text{pour tout } n\geq 0 \end{cases}$

Exercice 59 (Violette COQUATRIX-HENRIOT)

Soit f une fonction définie au voisinage de 0. Montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} l$ si et seulement si pour toute suite u convergeant vers 0, on a $f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$.

Exercice 60 (Julien CORDOBA)

1. Donner un équivalent simple de u_n, avec $\begin{cases} u_0 = \alpha \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n} \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

2. Etude de u définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{1+u_n}} \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

Exercice 61 (Brice COUTURIER)

Montrer que $u_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ admet une limite lorsque $n \to \infty$.

On pourra montrer que si les α_n sont > 0 et tendent vers l, alors $\sqrt[n]{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$.

Exercice 62 (Moez DHARI)

Etudier u définie par $\begin{cases} u_0 = 1/3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

avec $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si x=0} \\ x \ln |x| & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 63 (Julien DESMONT)

Déterminer la limite éventuelle de $\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}} - \sqrt[3]{x}$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 64 (Clément FAUCHERRE)

Etudier la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1515 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

Exercice 65 (Florence FERLAY)

$$(1 - \sin x) \tan x \underset{x\to\pi/2}{\longrightarrow} ?$$

Exercice 66 (Alvaro FERNANDEZ)

1. (exo 1) Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad |f(x) - f(y)| < \frac{1}{x+y}.$$

   - Montrer que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} f(1)$.
   - Montrer que f est constante.

2. (exo 2) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ telle que :

$$\forall x, y \in [0,1], \qquad |f(x) - f(y)| \leq |x - y| \cdot$$

   Montrer que f a un unique point fixe.

Exercice 67 (Sébastien GILIBERT)

1. $\dfrac{(\ln x)^2}{1 - \sin \frac{\pi}{2} x} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} ?$ *(on trouvera $\dfrac{8}{\pi^2}$)*

2. Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ continue. Montrer qu'il existe $\alpha\in[0,1]$ tel que $f(\alpha)=\alpha$.

Exercice 68 (Bénédicte GILLOT)

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $x_n^2+\ln x_n=n$, puis donner un équivalent simple de x_n lorsque $n\to\infty$.
2. $(1+x)^{1/x}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}$?

Exercice 69 (Nicolas GUFFROY)

1. (exo 1) Montrer que $x\mapsto(1-\cos x)^{\sin x}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$
2. (exo 2) Soient $f,g\in\mathcal{C}([a,b])$, avec f à valeurs ≥ 0 et non uniformément nulle. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt>0$, puis qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt=g(c)\int_a^b f(t)dt.$$

On pourra encadrer le rapport $\dfrac{\int fg}{\int f}$.

Exercice 70 (Alexandre ISAAZ)

Domaine de définition et prolongements de $x\mapsto\dfrac{\ln^2 x}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$.

Exercice 71 (Priscille LANEYRIE)

1. (cours) Montrer que si $f\underset{0^-}{\longrightarrow}+\infty$ et $g\underset{+\infty}{\longrightarrow}1^+$, alors $g\circ f\underset{0^-}{\longrightarrow}1^+$.
2. (exo) DL à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{\sin x+\tan x+\sinh x}{\cos x-\mathrm{e}^x}$.

Exercice 72 (François LECOCQ)

- Montrer que $\mathrm{e}^{f(t)}\underset{t\to a}{\sim}\mathrm{e}^{g(t)}$ si et seulement si $f(t)-g(t)\underset{t\to a}{\longrightarrow}0$.
- Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $\mathrm{e}^{\sqrt{x^2-1}}$ et $\mathrm{e}^{\sqrt{x^2-x}}$.

Exercice 73 (Jaime LEZAMA)

Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ continue telle que $f\circ f=f$.
Montrer que $X=\{x\in[0,1]\mid f(x)=x\}$ est un segment.

On pourra montrer : $X=f([0,1])$

Exercice 74 (Jean-François LEFEBVRE, Fabrice ROLANDO)

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en 0 et en 1 avec :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f(x)=f(x^2).$$

Montrer que f est constante.

Exercice 75 (Damien LOUBET)

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_\lambda :]-1,0[\cup]0,1[\to \mathbb{R}$ par :
$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}\tan x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\ln(1+\lambda x)}{\tan x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
Déterminer les λ pour lesquels f_λ admet un prolongement continu sur $]-1,1[$.
2. Que dire de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique admettant une limite en $+\infty$?

Exercice 76 (Florence LOUIS)

1. (cours) Montrer que si $f : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ est décroissante, alors elle admet une limite en 0^-.
2. (exo) Donner "un DL" à l'ordre 4 de $\sqrt[n]{2^n + (3/4)^n + n^{10}}$ lorsque n tend vers $+\infty$ (plus précisément, on demande un équivalent simple, puis un équivalent simple de la différence, etc...)

Exercice 77 (Amel LUU)

Montrer que la suite u de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente. *On pourra considérer $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.*

Exercice 78 (Damien MONTARNAL)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ à valeurs positives. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = \left(\displaystyle\int_a^b f^n\right)^{1/n}$. Montrer que u est convergente. *(on montre en fait "en ε" que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \underset{[a,b]}{\mathrm{Max}}\, f$)*

Exercice 79 (Benjamin PAPAZIAN)

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ telle qu'il existe $\alpha, K > 0$ tel que :
$$\forall x,y \in [0,1], \qquad |f(x) - f(y)| \leq K\,|x-y|^\alpha .$$
Montrer qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) = \dfrac{\ln(1+x_0)}{\ln 2}\cdot$
On pourra montrer que f est continue...

Exercice 80 (Mélanie PERRUS)

1. (cours) Définition de la continuité en un point.
2. (exo) $\dfrac{(\sin x)^{\sin x} - 1}{(\tan x)^{\tan x} - 1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} ?$ *(on trouvera 1)*

Exercice 81 (Sylvère RUELLAN)

1. (cours) Si $f(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 3$, alors gnagnagna...
2. (exo) Esquisser proprement le graphe de $x \mapsto \ln(1 + |\mathrm{sh}\, x|)$.

Exercice 82 (Silvère RUELLAN)

1. (cours) Montrer que si u est convergente, alors elle est bornée.
2. (exo) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{2+3.10^n}{3+2.10^n}\cdot$

- Montrer que u admet une limite finie l.
- Déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n - l| < \dfrac{1}{100}$.

Exercice 83 (Alexandre VILLEDIEU, Amandine BUFFAZ)

1. Que dire de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique admettant une limite en $+\infty$? *(Fixer x_0, et regarder $f(x_0 + nT)$ lorsque $n \to \infty$)*
2. Donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{k^2}$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 84 (Paul WILCZINSKY)

Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\sum_{k=0}^{n} \ln(1 + k/n^2) = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o(1/n^2).$$

Ecrire $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + \varepsilon(x)x^4$, *avec* $\varepsilon :]-1, 1[$ *une fonction qui tend vers* 0 *en* 0... *On trouvera comme Maple :*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{6n^2} + o(1/n^2).$$

Exercice 85 (Sophie WU, Eric PIERRE)

Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ continues, vérifiant $f \circ g = g \circ f$. On note X l'ensemble des points fixes de f.

- Montrer que X admet une borne supérieure M et une borne inférieure m.
- Montrer que m et M sont dans X.
- Montrer que X est g-stable.
- Montrer qu'il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $g(\alpha) = f(\alpha)$.

4 Limites ; dénombrement ; structures algébriques

Quinzaine du 19 au 30 Novembre 2001

Exercice 86 (Eric ABOUAF)

1. (exo 1) $\dfrac{x \sin\frac{1}{x} - 1}{x\ln(x+3) - x\ln x - 3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}$? *On trouvera* $f(x) \sim -\dfrac{1}{6x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
2. (exo 2) Combien existe-t-il de suites strictement croissantes de p éléments de $[\![1, n]\!]$?

Exercice 87 (Jean-Baptiste BARTH)

Prolongement continu éventuel en 0 de $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\cos x^2 - \mathrm{e}^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Exercice 88 (Jean-Pascal BIGOT)

Soit E un ensemble de cardinal n.

- Dénombrer $F = \left\{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2 \;\middle|\; A \cap B = \emptyset\right\}$.
- Dénombrer $G = \left\{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2 \;\middle|\; A \cup B = E\right\}$.
- Exhiber une bijection entre F et G.

Exercice 89 (Laurent BLANC)

- Nombre de surjections de $[\![1, n+3]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$?
- Reprise de l'exercice de TD sur les surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$: Montrer que $S_{n,3} = 3^n - 3 - 3S_{n,2}$, et donner ue relation analogue pour $S_{n,p}$.
- Si $0 \leq k < p$, montrer : $\displaystyle\sum_{q=k}^{p} (-1)^q \mathrm{C}_p^q \mathrm{C}_q^k = 0$.
- Montrer enfin :

$$S_{n,p} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} k^n \mathrm{C}_p^k.$$

Exercice 90 (Nicolas BLOUMINE)

$$\frac{x^{\operatorname{sh} x} - (\operatorname{sh} x)^x}{x^{\sin x} - (\sin x)^x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \ ?$$

On trouvera -1

Exercice 91 (Jérome BOLLARD)

1. Nombre d'anagrammes de GONNORD. *(Réponse : 1260)*
2. Dénombrer, à n fixé, les "n-mots de Gauss", c'est-à-dire les éléments de $[\![1, n]\!]^{2n}$ où chaque élément de $[\![1, n]\!]$ apparaît deux fois. *(Réponse :* $\dfrac{(2n)!}{2^n}$*)*

Exercice 92 (Valentine BONNET)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{Q}^* \end{cases}$ Montrer que f est discontinue en 0, en tout irrationnel, en tout rationnel autre que 1 et -1, et enfin est continue en 1 et -1.

Exercice 93 (Amandine BUFFAZ)

1. (exo 1) Nombre de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.
2. (exo 2) Soit $f : x \mapsto E(x) + \big(x - E(x)\big)^2$. Trouver l'ensemble des points de continuité de f puis tracer son graphe.

Exercice 94 (Florent CARUZZI)

1. (exo 1) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\mathrm{C}_n^k$
2. (exo 2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et vérifiant $f(2x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 95 (Marie CLAIRO)

1. (exo 1) Montrer que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et périodique est bornée.
2. (exo 2) Soient A de cardinal n et B de cardinal p. Montrer que $\mathcal{P}(A \times B)$ peut être mis en bijection avec $\big(\mathcal{P}(A)\big)^B$ (l'ensemble des applications de B dans $\mathcal{P}(A)$).
   Il suffit de calculer les cardinaux. Cela dit, si on demande d'expliciter une telle bijection, une bijection naturelle serait l'application qui à $P \subset A \times B$ associe l'application φ_P qui à tout $b \in B$ associe l'ensemble des $a \in A$ tels que $(a, b) \in P$.

Exercice 96 (Violette COQUATRIX-HENRIOT)

1. (exo 1) $\dfrac{1}{\ln\cos x} - \dfrac{2}{\sin^2 x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow}$? *On trouvera 1*
2. (exo 2) Nombre de surjections de $[\![1,4]\!]$ dans $[\![1,3]\!]$. *On trouvera 36*

Exercice 97 (Nicolas CHAMPAGNE)

Calculer :

$$\sum_{A,B\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])} |A\cap B|\,.$$

On trouvera 2^{2n-2}*. Première méthode : on fixe* k*, puis* A *de cardinal* k*, puis on choisit* $B_1\subset A$ *et* $B_2\subset\overline{A}$*, etc... Deuxième méthode : on justifie l'égalité :*

$$\sum_{A,B\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])} |A\cap B| = \sum_{A,B\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])} \left|A\cap\overline{B}\right|,$$

puis on écrit $2S = \ldots$

Exercice 98 (Brice COUTURIER)

1. (exo 1) E est l'ensemble des entiers dont le représentation en base 10 est consituée des chiffres $1,2,3,4,5,6$ permutés (par exemple, $126534\in E$ mais $123563\notin E$).
   - Combien y a-t-il d'éléments dans E ? *On les range pour la suite dans l'ordre croissant.*
   - Quel est le premier (le plus petit) ? et le dernier ?
   - Quel est le rang de 362145 ? *Réponse : 343*
   - Donner le 500ème élément de E *Réponse : 516432*
2. (exo 2) On fixe $n\in\mathbb{N}$, avec $n\geq 2$. $\dfrac{\tan nx - n\tan x}{\sin nx - n\sin x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow}$? *On trouvera* -2

Exercice 99 (Matthieu CHAMBAUD)

$$\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}-x}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} ? \qquad \text{(Réponse : } \frac{11}{24}\text{)}$$

Exercice 100 (Julien CORDOBA)

Calculer le cardinal de l'ensemble des couples (A,B) de parties de $[\![1,n]\!]$ vérifiant $A\subset B$.

Exercice 101 (Moez DHARI)

1. (exo 1) Pour $p,k\in\mathbb{N}^*$, on note $S_{p,k}$ le nombre de surjections de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,k]\!]$. Montrer que si $n,p\in\mathbb{N}^*$, alors $n^p = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k S_{p,k}$.
2. (exo 2) $\dfrac{\ln\sin x}{\cos x} \underset{x\to\pi/2}{\longrightarrow}$?

Exercice 102 (Julien DESMONT)

1. (exo 1) Nombre de surjections d'un ensemble de 5 éléments dans un ensemble de 4 éléments. *On trouvera 240*
2. (exo 2) $x^2\left(\mathrm{e}^{1/x^2}-\cos\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}$? *Réponse :* $\dfrac{3}{2}$

Exercice 103 (Clément FAUCHERRE)

1. (exo 1) Domaine de définition et prolongements de $x \mapsto \dfrac{\ln^2 x}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$.
2. (exo 2) Combien existe-t-il de couples (A,B) de parties de $[\![1,n]\!]$ telles que $A\cap B=\emptyset$?

Exercice 104 (Florence FERLAY, Damien MONTARNAL)

Pour $n,p\in\mathbb{N}^*$, on définit l'ensemble

$$E_{n,p}=\big\{(\alpha_1,...,\alpha_p)\in\mathbb{N}^p \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i=n\big\}.$$

Calculer le cardinal de $E_{n,p}$
On établira une bijection entre E et une partie de $\{0,1\}^{n+p-1}$. On trouvera finalement C_{n+p-1}^n

Exercice 105 (Alvaro FERNANDEZ)

- Donner LES puis DES sous-groupes de $(\mathbb{U}_6,.)$.
- Montrer que U_k est un sous-groupe de $\mathbb{U}_n$ si et seulement si k divise n.

Exercice 106 (Sébastien GILIBERT)

1. (exo) Image et noyau de $z\in\mathbb{C}^*\mapsto z^n$.
2. (cours) Au fait, quels sont les $z\in\mathbb{C}$ tels que $z^n=1$?

Exercice 107 (Bénédicte GILLOT)

1. (exo 1) Nombre d'anagrammes de GONNORD, puis de PRESTIGIDITATION.
2. (exo 2) $\dfrac{1}{\ln\cos x}+\dfrac{2}{\sin^2 x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}$?

Exercice 108 (Nicolas GUFFROY)

On définit $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]=\{a+b\sqrt{5}\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\}$. Montrer que $\big(\mathbb{Z}[\sqrt{5}],+,.\big)$ est un anneau.

Exercice 109 (Solal GUIRAND)

Soit E un ensemble fini à n éléments. Dénombrer les p-uplets $(X_1,...,X_p)$ de parties de E vérifiant $X_1\subset X_2\subset\cdots\subset X_p\subset E$.

On commencera par traiter les cas $p=2$ et $p=3$. Ensuite, on fera une récurrence sur p, en précisant très soigneusement la proposition qu'on cherche à montrer.

Exercice 110 (Alexandre ISAAZ)

1. (cours) Binôme de Newton.
2. (exo) Nombre d'anagrammes de ISSAZ, puis KEPENEKIAN.

Exercice 111 (Priscille LANEYRIE)

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit :

$$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{k/n^2}.$$

Montrer qu'il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $u_n=a+\dfrac{b}{n}+o(1/n)$.

On peut faire un calcul direct (suite géométrique), puis un DL. L'esprit de l'exo (cf exercice 84) était plutôt de majorer la quantité $\left|e^x - (1 + x + x^2/2)\right|$*. Dans les deux cas, on trouve :* $a = 1$ *et* $b = 1/2$.

Exercice 112 (François LECOCQ)

1. (exo 1) Dans un jeu de 32 cartes, combien de donnes de 8 cartes comportent :
   - exactement un roi et une dame ? *(Réponse : 2153536)*
   - au moins un roi et au moins une dame ? *(Réponse :* $\mathrm{C}_{32}^8 - 2\mathrm{C}_{28}^8 + \mathrm{C}_{24}^8$*)*
2. (exo 2) $\dfrac{\mathrm{e}^{\sin x} - 1 - x - x^2/2}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow}$? *(Réponse :* 0*)*

Exercice 113 (Jean-François LEFEVRE)

Calculer sous forme simple $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{C}_n^k}{k+1}$ et $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\mathrm{C}_n^k}{k+1}$.

On trouvera respectivement $\dfrac{2^{n+1} - 1}{n+1}$ *et* $\dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 114 (Jaime LEZAMA)

$(G, .)$ est un groupe, et A est une partie non vide de G. Si $x \in G$, xA^{-1} désigne l'ensemble $\{x.a^{-1} \mid a \in A\}$.

- Montrer que $a \mapsto xa^{-1}$ induit une bijection entre A et xA^{-1}.
  On suppose dans la suite que G est fini, et $2\,|A| > |G|$.
- Montrer que $A \cap xA^{-1} \neq \emptyset$, puis : tout élément de G est produit de deux éléments de A.

Exercice 115 (Damien LOUBET)

1. Dénombrer les mots que l'on peut former à partir des lettres de ALGEBRE.
2. Soit G un groupe fini de cardinal pair. Montrer qu'il existe un élément de G autre que le neutre qui est égal à son inverse.

Exercice 116 (Florence LOUIS)

Soit E un ensemble fini à n éléments.

- Dénombrer les couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \subset B$.
- Calculer $\displaystyle\sum_{A \in \mathcal{P}(A)} |A|$.

Exercice 117 (Amel LUU)

Soit E un ensemble fini non vide. On fixe un élément a de E, et on définit une fonction $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ de la façon suivante : pour $A \subset E$, on définit $f(A) = A \cup \{a\}$ si $a \notin A$, et $f(A) = A \setminus \{a\}$ si $a \in A$.

- Montrer que f est bijective.
- On note P_1 l'ensemble des parties de E de cardinal pair, et P_2 l'ensemble des parties de E de cardinal impair. Montrer que $f(P_1) = P_2$, et en déduire le cardinal de P_1 et P_2.

Exercice 118 (Benjamin PAPAZIAN)

Soit $(G, .)$ un groupe.

- Montrer que $\varphi : x \mapsto x^{-1}$ réalise une bijection de G.
- Montrer que φ est un automorphisme de G si et seulement si G est abélien.

Exercice 119 (Eric PIERRE)

1. (cours) Définition d'un groupe ; exemples ; propriété...
2. (exo) Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$

NDLR : si en terminale vous avez fait des stats, le résultat précédent fournit l'espérance d'une variable suivant une loi binomiale...

Exercice 120 (Fabrice ROLANDO)

1. (exo 1) $\dfrac{\mathrm{e}^{\tan x} - 1 + \ln(1-x)}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow}$?
2. (exo 2) On pose 4 pions sur un damier 4×4.
   - combien a-t-on de possibilités ?
   - combien a-t-on de possibilités pour qu'il y ait un pion sur chaque colonne et chaque ligne ?
   - combien a-t-on de possibilités pour qu'il y ait exactement une colonne vide ?

Exercice 121 (Sylvère RUELLAN)

1. (exo 1) Dénombrer les surjections de $[\![1,6]\!]$ dans $[\![1,4]\!]$.
2. (exo 2) $\dfrac{\ln\cos\dfrac{1}{x}}{\mathrm{e}^{1/x} - \dfrac{x^2+\cos x}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}$?

Exercice 122 (Alexandre VILLEDIEU)

- Cardinal de $E = [\![10000; 99999]\!]$.
- Donner le cardinal de l'ensemble F des éléments de E dont la représentation décimale a tous ses chiffres distincts.
- Donner le cardinal de l'ensemble G (resp. H) des éléments pairs (resp. impairs) de F.

Exercice 123 (Paul WILCZYNSKI)

$$\left(\tan\frac{3}{2}x\right)^{\tan 3x} \underset{x\to\pi/6}{\longrightarrow} ?$$

(réponse : $1/e$)

5 Début de l'A.L. et des polynômes

Quinzaine du 3 au 14 décembre 2001

Exercice 124 (Jean-Baptiste BARTH)

1. (exo 1) Soit $n \geq 1$. $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même. Montrer que $(\mathcal{S}_n, \circ)$ est un groupe.
2. (exo 2) Soit $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$. On définit $\mathbb{Q}[j] = \left\{P(j) \;\middle|\; P \in \mathbb{Q}[X]\right\}$.
   Montrer que $\mathbb{Q}[j] = \left\{aj+b \;\middle|\; a,b \in \mathbb{Q}\right\}$, puis que c'est un corps.

Exercice 125 (Jean-Pascal BIGOT)

Soit $(G,.)$ un groupe (pas nécessairement commutatif). Pour $a \in G$, σ_a désigne l'application de G dans G : $x \mapsto a.x.a^{-1}$.

- Montrer que pour tout $a \in G$, σ_a est un automorphisme de G. On dit que σ_a est un "automorphisme intérieur", et l'ensemble des automorphismes intérieurs est noté $Int(G)$.
- Vérifier que l'ensemble $Aut(G)$ des automorphismes de G, muni de la loi $\circ$, est un groupe.
- Montrer que $Int(G)$ est un sous-groupe de $Aut(G)$.
- $Z(G)$ ("centre de G") désigne l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les autres. Exprimer $Z(G)$ à l'aide des noyaux des σ_a, et en déduire que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
- Montrer que $\sigma_a = \sigma_{a'}$ si et seulement si $a^{-1}.a' \in Z(G)$.
- Reprendre chacune des questions dans le cas où G est commutatif.

Exercice 126 (Laurent BLANC, Amel LUU)

Soit G un groupe fini. $\mathcal{S}_G$ désigne l'ensemble des bijections de G dans lui-même. Muni de la loi $\circ$, c'est un groupe (exercice simple).

- A $x \in G$ fixé,on considère l'application $f_x : y \mapsto x.y$. Montrer que $f_x \in \mathcal{S}_G$.
- Montrer que $x \mapsto f_x$ réalise un isomorphisme entre G et un sous-groupe de $\mathcal{S}_G$.
- Question subsidiaire : soient $n = |G|$ et φ une bijection entre G et $[\![1, n]\!]$. Montrer que $f \mapsto \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ réalise un isomorphisme entre $\mathcal{S}_G$ et $\mathcal{S}_{[\![1,n]\!]}$ (noté en général $\mathcal{S}_n$).

Il s'agit du théorème de Cayley*, qui dit que pour connaître tous les groupes finis, il "suffit" de connaître tous les sous-groupes des groupes symétriques $\mathcal{S}_n$.*

Exercice 127 (Nicolas BLOUMINE)

Soit θ l'unique racine réelle de $X^3 + X + 1$ (justifier rapidement...). On définit l'ensemble :

$$E = \left\{a + b\theta + c\theta^2 \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Montrer que E est un anneau intègre.

Question subsidiaire : montrer que $E = \left\{P(\theta) \;\middle|\; P \in \mathbb{Z}[X]\right\}$ (avec $\mathbb{Z}[X]$ "ce que l'on pense").

Exercice 128 (Jérome BOLLARD)

On définit $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$.

- Montrer que $\big(\mathbb{Z}[i], +, .\big)$ est un anneau commutatif.
- Munir $\mathbb{Z}^2$ de deux lois faisant de l'application $(x, y) \mapsto x + yi$ un isomorphisme d'anneaux.

Question subsidiaire : montrer que $\mathbb{Z}[i] = \{P(i) \,|\, P \in \mathbb{Z}[X]\}$.

Exercice 129 (Valentine BONNET)

Soient $(G, .)$ un groupe et H un sous-groupe de G. Pour $x \in G$, on définit $xH = \{x.h \,|\, h \in H\}$.

Montrer que xH est un sous-groupe de G si et seulement si $x \in H$.

Exercice 130 (Amandine BUFFAZ)

1. (cours) Définition d'une famille libre ; génératrice.
2. (exo) Soit $(G, .)$ un groupe (pas nécessairement commutatif). On fixe $a \in G$, et f_a désigne l'application de G dans G : $x \mapsto x.a^{-1}$.
   - Montrer que f_a est une bijection de G dans lui-même.
   - Pour $x, y \in G$, on définit $x * y = x.a.y$. Montrer que $(G, *)$ est un groupe.
   - Montrer que f réalise un isomorphisme de $(G, .)$ sur $(G, *)$. *NB : on ne parle pas d'endomorphisme car la loi au départ n'est pas celle à l'arrivée : les ensembles sont égaux, mais pas les groupes...*

Exercice 131 (Florent CARUZZI)

Soient $(A, +, .)$ un anneau, et $u, v \in A$ tels que $uv = vu$ et v nilpotent (i.e. : il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $v^n = 0$).

Montrer que u est inversible si et seulement si $u + v$ l'est.

Pour $\Rightarrow$, considérer $u^n - (-v)^n$... Pour $\Leftarrow$: utiliser $\Rightarrow$, en écrivant $u = (u + v) + (-v)$ et en prouvant que $-v$ est nilpotent.

Exercice 132 (Tiphanie CHATAIL)
On définit $\mathbb{Q}[i] == \{P(i)\,|\,P \in \mathbb{Q}[X]\}$.
- Montrer que $\mathbb{Q}[i] = \{a+bi\,|\,a,b \in \mathbb{Q}\}$.
- Montrer que $\big(\mathbb{Q}[i],+,.\big)$ est un anneau commutatif.

Exercice 133 (Marie CLAIRO, Mélanie PERRUS)

1. (cours) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $(e_1,...,e_n)$ une famille de vecteurs de E, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que si $\big(u(e_1),...,u(e_n)\big)$ est libre dans F, alors $(e_1,...,e_n)$ est libre dans E.
2. (exo) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Trouver les endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que pour tout $x \in E$, la famille $\big(x,u(x)\big)$ est liée.

Exercice 134 (Violette COQUATRIX-HENRIOT)
Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces d'un espace $\mathbb{K}$-espace vectoriel F.
- Montrer que $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace de F.
- Montrer que $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace de F si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.
- $F \setminus F_1$ est-il un sous-espace de F ?

Exercice 135 (Julien CORDOBA)
Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces de $\mathbb{R}^2$?
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2)\,|\,x+y=0\}$;
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2)\,|\,|x|=|y|\}$;
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2)\,|\,x^2+y^2=0\}$;
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2)\,|\,x^2+y^2=1\}$.

Dans chaque cas, on commencera par représenter l'ensemble en question.

Exercice 136 (Pierre COUTURIER)
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les quatre vecteurs $f_1=(1,2,3,4)$, $f_2=(1,0,1,0)$, $f_3=(0,1,0,1)$, et $f_4=(2,0,4,2)$.
- La famille (f_1,f_2,f_3,f_4) est-elle libre ?
- Est-elle génératrice ? (sinon, donner une base de l'espace qu'elle engendre dans $\mathbb{R}^4$).
- Comment le colleur a-t-il fait pour trouver cette famille ?[1]

Exercice 137 (Julien DESMONT)
Montrer que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,.)$ de trois façons différentes.

Exercice 138 (Clément FAUCHERRE)
Montrer que les sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ sont denses, ou bien de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ pour un certain $\alpha>0$.

Exercice 139 (Florence FERLAY)
Soient $p,n \in \mathbb{N}$, avec $0<p<n$. $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations (bijections) de $[\![1,n]\!]$ et G_p l'ensemble de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tels que $\sigma([\![1,p]\!]) = [\![1,p]\!]$.
- Montrer que $(\mathcal{S}_n,\circ)$ est un groupe.
- Montrer que G_p est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.
- Montrer que G_p est isomorphe à $\mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_{n-p}$.

Exercice 140 (Alvaro FERNANDEZ)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $m \geq 1$.
- Montrer que si $P'|P$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $mP=(X-\alpha)P'$.
- Montrer que si $P'|P$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{C}$ tels que $P=k(X-\alpha)^m$.

[1] Sachant qu'il n'a pas de Bréal à la maison...

- Réciproque ?

Exercice 141 (Sébastien GILIBERT)

Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_4[X]$ tel que $(X-2)^2 | P+10$ et $(X+2)^3 | P-12$.

Exercice 142 (Bénédicte GILLOT)

Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $f_k : x \mapsto \sin kx$ et $g_k : x \mapsto \cos kx$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $(f_1, f_2, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ est libre.
On peut obtenir le résultat directement (voir l'exercice 157), ou bien par récurrence sur n : à l'ordre $n+1$, on prend une CL nulle et on dérive deux fois...

Exercice 143 (Nicolas GUFFROY)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(P_0, ..., P_n)$ une famille de polynômes tels que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\deg P_i = i$. Montrer que $(P_0, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 144 (Alexandre ISAAZ)

1. (exo 1) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (suites réelles). On rappelle la définition du symbole de Kronocker : $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ A $p \in \mathbb{N}$ fixé, u^p désigne la suite $(\delta_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$.
   Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$, la famille $(u^0, u^1, ..., u^q)$ est libre dans E.
2. (exo 2) On note à nouveau $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et on définit :
   $$F = \{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n\}.$$
   - Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   - Trouver deux suites géométriques non nulles qui sont dans F.
   - Montrer qu'elles constituent une base de F.

Exercice 145 (Mickael KEPENEKIAN)

Soit $(G, .)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G. On va montrer que $|H|$ divise $|G|$. C'est le *"théorème de Lagrange"*.
- Si $x \notin H$, montrer que $H \cap xH = \emptyset$.
- Conclure dans le cas où $G = H \cup xH$.
- Dans le cas $G \neq H \cup xH$, on fixe $y \in G \setminus (H \cup xH)$. Montrer que yH n'a aucun élément en commun avec H ni avec xH. Conclure dans le cas où $G = H \cup xH \cup yH$.
- Terminer...

Exercice 146 (Priscille LANEYRIE)

1. (exo 1) Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
   - $\{u \in E \mid u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\}$;
   - $\{u \in E \mid u_n = O(1/n)\}$;
   - $\{u \in E \mid \exists k \in \mathbb{R};\ \ u_n \sim \frac{k}{n}\}$.
2. (exo 2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(\alpha) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$, et en trouver une base simple.

Exercice 147 (François LECOCQ)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} X(X-1)...(X-k+1)$ en produit d'irréductibles.
Indication : regarder $P(i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 148 (Jaime LEZAMA)

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le reste dans la division euclidienne de $(X \sin\theta + \cos\theta)^n$ par $(X^2+1)^2$.

Exercice 149 (Jean-François LEFEVRE)

On considère n réels $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ $(n \geq 2)$. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on définit $f_i : x \mapsto |x - x_i|$. Montrer que la famille $(f_1, ..., f_n)$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
Indication : On part d'une combinaison linéaire nulle des f_i (surtout pas des $f_i(x)$!) on évalue ensuite cette combinaison en $x > x_n$, puis en $x \in]x_{n-1}, x_n[$, etc... et on prouve ainsi la nullité des coefficients intervenant dans la CL (par récurrence descendante). Une autre façon de faire (sans récurrence) consiste à dire que si $\lambda_{i_0} \neq 0$, alors dans l'égalité $\lambda_{i_0} f_{i_0} = -\sum_{i \neq i_0} \lambda_i f_i$, l'un des membres est dérivable en x_{i_0} mais pas l'autre...

Exercice 150 (Florence LOUIS)

Si $u = (x,y)$ et $u' = (x', y')$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on définit $u.u' = xx' + yy'$ (plus tard, on parlera de produit scalaire). Si G est une partie de $\mathbb{R}^2$, on définit

$$G^{\perp} = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \forall v \in G, u.v = 0 \right\}.$$

- Montrer un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ (pour la loi $+$) qui n'est pas un sous-espace.
- Montrer que si G est un sous-groupe (resp. sous-espace) de $\mathbb{R}^2$, alors $G^{\perp}$ aussi.
- On suppose que G est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $G \cap G^{\perp} = \{0\}$ et $G + G^{\perp} = \mathbb{R}^2$.

Exercice 151 (Damien MONTARNAL)

1. (cours) Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
2. (exo) Soient $f_1 : x \mapsto \sin x$, $f_2 : x \mapsto \sin 2x$, ..., $f_n : x \mapsto \sin nx$, $g_1 : x \mapsto \cos x$, ..., $g_n : x \mapsto \cos nx$.
   Montrer que la famille $(f_1, .., f_n, g_1, ..., g_n)$ est libre dans l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
   On pourra partir d'une CL nulle, la multiplier par $\sin k_0 x$, et intégrer entre 0 et π...

Exercice 152 (Benjamin PAPAZIAN)

1. (cours) Formule de Taylor (“algébrique”, i.e. pour les polynômes).
2. (exo) $E = \mathbb{R}^{[\![1,n]\!]}$ (applications de $[\![1,n]\!]$ dans $\mathbb{R}$) : il est muni de façon naturelle d'une structure d'espace vectoriel. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on définit $f_i \in E$ par : pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $f_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (bref, $f_i(j) = \delta_{i,j}$, pour ceux qui se souviennent du symbole de Kronecker)
   Montrer que $(f_1, ..., f_n)$ est une base de E.

Exercice 153 (Mélanie PERRUS)

1. (exo 1) Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on définit $x * y = x + y - xy$.
   - $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe ?
   - $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ est-il un groupe ?
2. (exo 2) Montrer que si $0 \leq p \leq n$, alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \mathrm{C}_k^p = \mathrm{C}_{n+1}^{p+1}$.
   Récurrence sur n avec le triangle de pascal en toile de fond, ou bien calcul astucieux utilisant $\mathrm{C}_k^p = \mathrm{C}_{k+1}^{p+1} - \mathrm{C}_k^{p+1}$.

Exercice 154 (Eric PIERRE)

1. (cours) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $(e_1, ..., e_n)$ une famille de vecteurs de E, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ injective. Montrer que si $(e_1, ..., e_n)$ est libre dans E, alors $\big(u(e_1), ..., u(e_n)\big)$ est libre dans F.
2. (exo) Déterminer (i.e. : en donner des bases) l'image et le noyau de

$$\Phi \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y + z, 2x - y + z, x + y + z, 3x + 2y + 2z) \end{array} \right.$$

Exercice 155 (Fabrice ROLANDO)

1. (cours) Soient E et F deux espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et E_1 un sous-espace de E. Montrer que $u(E_1)$ est un sous-espace de F.
2. (exo) Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base d'un espace E, et $y_1, ..., y_n$ des vecteurs d'un second espace F. Montrer qu'ilexiste une unique application linéaire $u : E \to F$ telle que $u(e_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 156 (Philippe ROLET)

Le but de l'exercice est de démontrer le théorème de D'Alembert-Gauss.

- Montrer que $x \in \mathbb{R} \mapsto \left|1 + x^4 - 50x^{17}\right|$ admet un minimum local en 0, mais que ce n'est pas le cas de $x \in \mathbb{C} \mapsto \left|1 + x^4 - 50x^{17}\right|$, ni de $x \in \mathbb{C} \mapsto \left|1 + ix^{14} - 500x^{175}\right|$.

  Dans la suite, on fixe P un polynôme complexe non constant, et on suppose qu'il n'a pas de racine complexe (on va arriver à une absurdité). On admet qu'il existe un complexe z_0 tel que $|P(z)|$ admet un minimum global en z_0 (ce minimum est par hypothèse non nul).
- Construire $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant, tel que $|Q|$ admet un minimum local en 0, avec $Q(0) = 1$.
- Arriver à une absurdité.

Exercice 157 (Alexandre VILLEDIEU)

1. (cours) Binôme de Newton.
2. (exo 1) Soient $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x$, $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ et $f_3 : x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
   On pourra partir d'une CL nulle, et regarder ce qui se passe vers $-\infty$ après division par e^x…
3. (exo 2) Soit $f_1 : x \mapsto \sin x$, $f_2 : x \mapsto \sin 2x$, ..., $f_n : x \mapsto \sin nx$. Montrer que la famille $(f_1, .., f_n)$ est libre dans l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
   On pourra partir d'une CL nulle, la multiplier par $\sin k_0 x$, et intégrer entre 0 et π…

Exercice 158 (Paul WILCZYNSKI)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les 4 vecteurs $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (-1, 1, 1)$, $u_3 = (-1, 2, 3)$, et $u_4 = (1, 1, 1)$.
La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ? génératrice ?

Exercice 159 (Sophie WU)

On considère l'application

$$\Phi \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + z, y - z, x + y + z, x - y - z) \end{array} \right.$$

L'application ("clairement linéaire") Φ est-elle injective ? surjective ? Donner une base de son image.

6 Polynômes ; dérivation

Quinzaine du 7 au 18 Janvier 2002

Exercice 160 (Eric ABOUAF)

1. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x)$ tende vers $+\infty$. Conjecturer et démontrer.
2. (suite à une démo fausse de la propriété précédente). Que dire de la proposition suivante ? "Si $f(x)$ tend vers $l \in \mathbb{R}$ et f dérivable, alors sa fonction dérivée tend vers 0 en $+\infty$" ?
3. Que dire de la proposition suivante "Si f est dérivqble sur $\mathbb{R}$ et tend vers $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ et f monotone, alors $f'(x)$ tend vers 0" ?

Exercice 161 (Jean Baptiste BARTH)

1. Limite éventuelle en $+\infty$ de $x^2(\mathrm{e}^{1/x} - \mathrm{e}^{1/(x+1)})$? (*réponse : 1*)
2. Limite éventuelle en 0^+ de $(sin(x))^{sinx} - x^x$? (*réponse : 0, un équivalent est* $-\dfrac{x^3}{6}\ln x$)

Exercice 162 (Jean-Pascal BIGOT)

Soit E un espace et $(e_1, e_2, \dots e_n)$ une famille génératrice. Montrer que toute famille de cardinal $n+1$ est liée.

Exercice 163 (Laurent BLANC)

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Min}\{f(x), f(y)\} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \mathrm{Max}\{f(x), f(y)\}$$

Réponse : les $x \mapsto K.e^x$.

Exercice 164 (Nicolas BLOUMINE)

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ telle que $f(0) = 0$ et $\exists a, f(a).f'(a) < 0$. Que peut-on dire ? Le démontrer.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^1) \cap \mathcal{D}()0, +\infty[)$ telle que $f(0) = 0$ et $f(t) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Que peut-on dire sur f ? Le démontrer.

Exercice 165 (Valentine BONNET)

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui tend vers l^- en $-\infty$ et l^+ en $+\infty$. Que peut-on dire de f ? Et si $l^- = l^+$?

Exercice 166 (Amandine BUFFAZ)

1. (cours) Définition de l'ordre de multiplicité d'une racine et caractérisation à l'aide des dérivées.
2. (exo) Dans $\mathbb{R}[X]$, décomposer en produits de facteurs du second degré le polynôme $P(x) = X^{2n} + 2\sin\varphi X^n + 1$ où $\varphi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 167 (Florent CARRUZI)

Soit $P = X^4 + pX^3 + qX^2 + rX + s$. Donner une CNS simple sur p, q, r, s pour qu'il existe-t-il deux racines de P dont le produit est égal au produit des deux autres ?

Exercice 168 (Nicolas CHAMPAGNE)

Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$. Soit une fonction $f \in \mathcal{C}([a,b])$, et $f(a) \neq f(b)$. On suppose que f est dérivable en a et en b avec $f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$, tel que :

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = \frac{f(c)-f(b)}{c-b} = \frac{f(b)-f(a)}{c-a}.$$

Exercice 169 (Marie CLAIRO)

1. (cours) Relations coefficients et racines.
2. (exo)
   - Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+, \dfrac{\sin t}{t} \leq 1$.
   - En déduire $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, x\cos x \leq \frac{\pi^2}{16}$.

Exercice 170 (Violette COQUATRIX-HENRIOT)

Soit f une fonction, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que pour toute application polynômiale φ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), on a $f \circ \varphi = \varphi \circ f$. Montrer que $f = \mathrm{Id}(\mathbb{R})$.

Exercice 171 (Julien CORDOBA)

1. Dérivée k-ième de sin.
2. Trouver $n$pour que $\left|\sin 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{sin^{(k)}0}{k!}\right| \leq 10^{-3}$

Exercice 172 (Brice COUTURIER)

1. (cours) Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(e_1, \dots e_n)$ une famille génératrice de E. Montrer que la famille $(u(e_1)\dots u(e_n))$ est une famille génératrice de F.
2. (exo) Factoriser sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ le polynôme $P = 16X^5 - 20X^3 + 5X - 1$ sachant qu'il admet une racine double et une autre simple évidente. (*pour trouver la racine double p, faire la division euclidienne de P par P', et évaluer en p.*)

Exercice 173 (Moez DHAHRI)

1. Trouver les fonctions dérivables en 0 vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$
2. Trouver un équivalent simple de $(sin(x))^{sinx} - x^x$ en 0 (*réponse :* $-\dfrac{x^3}{6}\ln x$).

Exercice 174 (Julien DESMONT)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \neq y$, $|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2 \left|\ln|x-y|\right|$. Montrer que f est constante. (on pourra montrer que f est dérivable, ...)
2. Déterminer les polynômes $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$, unitaires, qui ont toutes leurs racines réelles et les coefficients des monômes de degré $n-1$ et $n-2$ sont nuls.

Exercice 175 (Clément FAUCHERRE)

1. (cours) Définition de la dérivabilité en x_0
2. (exo) Soit $P = X^6 + mX^4 + 10X^3 + nX + p$, avec m, n, p dans $\mathbb{R}$
   – Trouver m, n, p pour que P admette une racine quadruple.
   – Résoudre alors $P(X) = 0$

Exercice 176 (Florence FERLAY)

1. (cours) Enoncer et prouver le TAF.

2. (exo) Soit $f \in \mathcal{D}([0,1]) \to \mathbb{R}$, telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = f'(1) = 0$. Soit g définie par :

$$g \left\| \begin{array}{ccl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

– Montrer que g atteint un max M en un point c de $[0,1]$.
– Montrer que $c \neq 0$
– Montrer que $c \neq 1$
– En déduire $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.

Exercice 177 (Alvaro FERNANDEZ)

Soit $f \in \mathcal{D}(]0,1[)$ vérifiant $f \underset{0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $f \underset{1^-}{\longrightarrow} +\infty$. Que conjecture-t-on ? Le prouver.

Exercice 178 (Sébastien GILIBERT)

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels tous distincts deux à deux.
– Montrer que pour tout i de $[\![1,n]\!]$, il existe un unique polynôme $P_i \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que

$$\widetilde{P_i}(\alpha_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

– Soient $\beta_1, \ldots \beta_n \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall i, L_n(\alpha_i) = \beta_i$.

Exercice 179 (Bénédicte GILLOT)

On considère l'application

$$\varphi \left\| \begin{array}{ccl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Min}\{x, 1-x\} \end{array} \right.$$

– Vérifier que $\varphi(x) = \dfrac{1}{2} - \left| x - \dfrac{1}{2} \right|$
– Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable, telle que $f(0) = f(1) = 0$ et il existe $K > 0$ vérifiant $\forall t, |f'(t)| \leq K$. Montrer que $\forall x \in [0,1], |f(x)| \leq K\varphi(x)$ puis $\left| \displaystyle\int_0^1 f \right| \leq \dfrac{K}{2}$.

Exercice 180 (Nicolas GUFFROY, Florence LOUIS)

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue et dérivable sur $[0,1]$, telle que $f'(0) < 1$ et $\forall x \not{0}, |f(x)| < x$. Montrer qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que pour tout x de $[0,1]$, $f(x) \leq kx$.
2. Soit $u_0 \in [0,1]$ et une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue et dérivable sur $[0,1]$, telle que $f'(0) < 1$ et pour tout réel x, $|f(x)| < x$ et de plus f est à valeurs positives. Soit la suite (u_n) définie par u_0 est $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $u_n = o(\frac{1}{k^n})$.

Exercice 181 (Solal GUIRAND)

On note $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X(X-1)$, $P_k = X(X-1)(X-2)\ldots(X-k+1)$. Prouver que tout polynôme de degré $\leq n$ peut s'écrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k P_k$ de façon unique. En déduire que l'on doit pouvoir calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p \mathrm{C}_n^k$ comme polynôme en n.

Exercice 182 (Alexandre ISAAZ)

1. Soit $f \in \mathcal{D}([a,b])$ vérifiant $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.
   - Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ vérifiant $f'(c) = 0$.
   - Soit $f'(a) < k < f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ vérifiant $f'(c) = k$.
2. Dérivée n-ième de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}\cdot$ *Indication : commencer par une DES !*

Exercice 183 (Priscille LANEYRIE)

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$. Que conjecture-t-on ? Le prouver.

Exercice 184 (François LECOCQ)

Trouver le polynôme P de degré 5 tel que $P(X)+1$ soit divisible par $(X-1)^3$ et $P(X)-1$ soit divisible par $(X+1)^3$.

Exercice 185 (Jean-François LEFEVRE)

1. (cours) Enoncé et preuve du théorème de Rolle.
2. (exo)Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$; on suppose de plus que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [0,1], f'(x) > 0$. Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que $f(x) \geq mx$ pour tout x de $[0,1]$.

Exercice 186 (Damien LOUBET)

1. Enoncer la FTRI.
2. Trouver les fonctions $f : [0,1] \to [0,1]$, dérivables sur $[0,1]$, telles que $f \circ f$.

Exercice 187 (Amel LUU)

1. Déterminer les polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $P^2 + Q^2 = (X^2+1)^n$.
2. Equivalent de $\sin x - x$ en 0 ? *Réponse :* $\dfrac{-x^3}{6}\cdot$

Exercice 188 (Julien MONTARNAL)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ admettant uniquement des racines réelles. Montrer qu'il en est de même pour P'.

Exercice 189 (Mélanie PERRUS)

1. (cours) Enoncer le théorème des accroissements finis et le prouver.
2. (exo) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$ telle que $f(0) = 0$. On définit alors $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $\forall x > 0, g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Montrer que si f' est croissante sur $]0,+\infty[$, alors g est croissante sur $]0,+\infty[$.

Exercice 190 (Benjamin PAPAZIAN)

1. (cours) Leibniz
2. (exo) Etudier la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{k}{n^2})$.

Exercice 191 (Eric PIERRE)

Soit $P(z) = z^3 + \alpha z + \beta \in \mathbb{C}[X]$. On désigne par z_1, z_2, z_3 les racines de P.
- Décomposer P en produits d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
- Montrer $D = (z_1-z_2)^2.(z_1-z_3)^2.(z_3-z_2)^2 = -P'(z_1)P'(z_2)P'(z_3)$.
- Exprimer D en fonction de α et β.
- A quelle condition nécessaire P admet-il 3 racines réelles ?

Exercice 192 (Fabrice ROLANDO)

1. (exo) Soit P un polnyôme à coefficients réels de degré $n \geq 1$. Montrer que l'équation $(E) : P(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions réelles.
   Indication : Montrer que (E) a au plus n+1 solutions réelles, par l'absurde, en dérivant.
2. (cours) Théorème de Rolle

Exercice 193 (Silvère RUELLAN)

Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ 1-périodique admettant n zéros dans $[0,1[$ Montrer qu'il en est de même pour toutes les dérivées de f.

Exercice 194 (Alexandre VILLEDIEU)

1. (cours) Enoncé et peuve de la formule de Taylor pour les polynômes.
2. (exo) Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
   - Montrer que $\exists 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f'(x_i) = n$.
   - Montrer que $\exists 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(x_i)} = n$.

Exercice 195 (Paul WILCZYNSKI)

1. Soient $u = (1,1,-1)$, $v = (-1,1,1)$, $w = (1,-1,1) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}_3$.
2. Soit f la fonction

$$f \left\| \begin{array}{ccc} I =]-1,1[\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sinh x} - \frac{1}{\ln 1+x}. \end{array} \right.$$

   Etudier un éventuel prolongement $\mathcal{C}^1$ en 0.

Exercice 196 (Sophie WU)

1. Soit $F = \{(x,y,z,t) | x+y+z+t = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En donner une base.
2. On se place dans $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la famille $[(1,(X-a),(X-a)^2,\ldots,(X-a)^n)$ est une base de E.
3. Soit f de classe $\mathcal{C}_1$ sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe x_0 vérifiant $f(x_0) = x_0$ et $|f'(x_0)| < 1$. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que si $u_0 \in [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$, alors la suite de premier terme u_0 et vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ converge.

7 DES, intégration sur un segment

Quinzaine du 21 janvier 2002 au 1 février 2002

Exercice 197 (Eric ABOUAF, Bénédicte GILLOT)

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists! P_n \in \mathbb{R}[X], (e^{-t^2})^{(n)} = P_n(t)e^{-t^2}$.
- Déterminer le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.
- Trouver une équation différentielle vérifiée par P_n
- Montrer que P_n admet n racines.

Exercice 198 (Jean-Baptiste BARTH, Sébastien GILIBERT)

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, telle que $f'(a) = f'(b) = 0$. Soit $M = \mathrm{Sup}\{|f''(t)|\,|t \in [a,b]\}$. Montrer que $|f(b) - f(a)| \leq M\dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 199 (Jean-Pascal BIGOT)

1. Donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \sin \frac{k\pi}{n}\cdot$ *Indication : se ramener à une somme de Riemann. Réponse :* $u_n \sim n^3(\frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3})$.
2. Donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k}{n}$
   Indication : le théorème de Riemann n'est pas applicable, passer par des comparaisons avec des intégrales. Réponse : $u_n \sim -n$.

Exercice 200 (Laurent BLANC)

1. Soient $I = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin x}{\cos x - \sin x}$ et $J = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\cos x - \sin x}$.
   - Déterminer I et J "sans les calculer" *Indication : considérer* $I + J$ *et* $I - J$.
   - Comment calculer $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\alpha \cos x + \beta \sin x} dx$, si $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$?
2. Primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^8 - 1}$?

Exercice 201 (Nicolas BLOUMINE)

Décomposition en éléments simples de $F(X) = \frac{1}{(X^4+1)(X^2+1)(X-1)^2}$

Maple répond $1/4\,(X-1)^{-2} - 3/4\,(X-1)^{-1} + 1/2\,\frac{X(X^2+X+1)}{X^4+1} + 1/4\,\frac{X}{X^2+1}$

Exercice 202 (Jérome BOLLARD)

1. Calculer $\int_0^1 x^n \ln x dx$. *Après avoir justifié soigneusement l'existence de cette intégrale, par IPP successives on trouvera* $\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$
2. Calculer $\int_{1/4}^{3/4} \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}\cdot$ *Réponse :* $\frac{\pi}{3}\cdot$

Exercice 203 (Valentine BONNET)

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que $f(1) \neq 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante : pour $\in \mathbb{N}, u_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$. Montrer que $u_n \sim \frac{f(1)}{n}\cdot$
2. Décomposer en éléments simples la fraction $P = \frac{X^3}{X^3 - 2X^2 + 2X - 1}\cdot$ (*Réponse :* $1 + \frac{1}{X-1} + \frac{X}{X^2-X+1}$)

Exercice 204 (Amandine BUFFAZ, François LECOCQ)

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $F = \frac{1}{X^6 - 2X^3 + 1}\cdot$

Réponse : $\frac{1}{X^2} - \frac{2}{X} + 2\frac{X+1}{X^2+X+1} - \frac{1}{\left(X^2+X+1\right)^2}$

Exercice 205 (Florent CARUZZI)

On définit la suite (u_n) par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Montrer que u_n est convergente et calculer

sa limite.
Indication : Utiliser les formules de Taylor pour la fonction ln *au point* 1.

Exercice 206 (Nicolas CHAMPAGNE)

Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$, et $n \in \mathbb{N}^*$, vérifiant $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\int_0^1 t^i f(t)dt = 0$. Montrer que f admet au moins $n+1$ racines.

Exercice 207 (Marie CLAIRO)

1. Calculer $\int_0^{1/2} \frac{x^3}{x^3-x^2+x-1}dx\cdot$ *Réponse :* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ln 5 - \ln 2 - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}\cdot$
2. Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}\cdot$ *Réponse :* $-\frac{1}{20}+\frac{1}{2}\arctan 2 - \frac{\pi}{8}\cdot$

Exercice 208 (Violette COQUATRIX-HENRIOT)

Montrer que $\frac{1}{3} < \ln\frac{2}{3}\cdot$ En déduire que $\frac{113}{81} \leq \mathrm{e}^{1/3} \leq \frac{113}{81}+\frac{1}{1296}$ (sans calculatrice, évidemment).

Exercice 209 (Julien CORDOBA)

1. Inégalité de Minkowski.
2. Calculer $\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta^2}{2+\sin\theta}d\theta$. *Réponse :* $2\pi - 2 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\cdot$

Exercice 210 (Brice COUTURIER)

Montrer que
$$\forall n \geq 2, n!\mathrm{e} - E(n!\mathrm{e}) \leq \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$
Conclusion ?.
Indication : FTRI sur la fonction exponentielle

Exercice 211 (Moez DAHRI)

Soit $E = \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$. Soient $x_0, \dots x_n$ des réels distincts. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on note

$$l_k : \quad \varphi \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n(X) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(x_k) \end{array} \right.$$

- Montrer que les l_k forment une base de E.
- Montrer qu'il existe des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_{-1}^1 P(x)dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i P(x_i)$.

Exercice 212 (Julien DESMONT)

Soit $f \in \mathcal{D}^2(I)$ avec $I =]-a, a[$, $a > 0$.
- Donner la formule de Taylor Young appliquée à f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
- Soit g la fonction :

$$g \left\| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f'(x) & \text{si } x = 0 \\ \frac{f(x)-f(0)}{x} & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

  Montrer que g est continue et dérivable sur I.
- Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur I ;

Exercice 213 (Clément FAUCHERRE)

Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{x^5}{x^4+1}$. (*Réponse :* $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$)

Exercice 214 (Florence FERLAY)

1. Calculer $I = \int_0^1 \frac{x^4}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}$
2. Soit f la fonction "dents de scie" définie de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = n - \frac{1}{n.2^n}$ et $y_n = n + \frac{1}{n.2^n}$ on pose $f(n) = n$, $f(x_n) = f(y_n) = 0$, f est affine entre n et y_n, entre y_n et x_{n+1}, et entre x_{n+1} et $n+1$ (FAIRE UN DESSIN !). Montrer que $F : t \to \int_0^x f(t)dt$ est bornée. Conclusion ?

Exercice 215 (Un INCONNU)

Calculer $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x^4+1)^2}$. *Réponse :* $\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{32} \ln \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{32}\pi$

Exercice 216 (Nicolas GUFFROY)

1. (cours) Calculer la limite de $\sum_{k=0}^{n} \ln(\frac{n+k}{n})$.
2. (exo) Soit la fonction

$$\varphi \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_x^{2x} e^{-t^2} dt \end{array} \right.$$

   Donner les variations de φ et sa limite en $+\infty$.

Exercice 217 (Solal GUIRAND)

- Prouver que pour tout $t > 0$, $\frac{1}{\sqrt{1+2t}} \leq \sqrt{3+2t} - \sqrt{1+2t} \leq \frac{1}{\sqrt{3+2t}}$.
- En déduire un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{2k-1}}$.

Exercice 218 (Alexandre ISAAZ,Jaime LEZAMA)

1. Calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^0 \frac{x^4}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}dx$. (*Réponse :* $-6\ln 2 + \frac{25}{6}$)
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et E_1 un sous-espace de E. Montrer que $u(E_1)$ est un sous-espace de F.

Exercice 219 (Priscille LANEYRIE)

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle

$$F = \frac{X^8+1}{X^6-2X^5+3X^4-4X^3+3X^2-2X+1}.$$

Réponse : $X^2 + 2X + 1 + 1/2 \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1} - 1/2 \frac{-1+2X}{X^2+1} + \frac{X}{(X^2+1)^2}$

Exercice 220 (Jean-François LEFEBVRE)

Etude de $x \mapsto \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-1/t} dt$.

Exercice 221 (Jaime LEZAMA)

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ et admettant une primitive F sur $[a,b]$.

– On définit

$$\varphi \left\| \begin{array}{rcl} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(a) & \text{si } x=a \\ \frac{F(x)-F(a)}{x-a} & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

Montrer que φ prend toutes les valeurs possibles entre $f(a)$ et $A = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

– En déduire que f prend toutes les valeurs possibles entre $f(a)$ et A.

– Montrer que f prend toutes les valeurs possibles entre $f(a)$ et $f(b)$.

Exercice 222 (Damien LOUBET)

– Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins une fois sur $]0,1[$. (*2 méthodes : absurde ou Rolle à* $x \mapsto \int_0^x f$)

– On suppose de plus maintenant que $\displaystyle\int_0^1 t.f(t)dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $]0,1[$. (par l'absurde)

Exercice 223 (Florence LOUIS)

1. (cours) Soit f continue positive, non nulle, sur $[a,b]$. Que peut-on dire de $\displaystyle\int_a^b f$? Démonstration.
2. (exo) Pour $x \in]-\dfrac{\pi}{2} = I, \dfrac{\pi}{2}[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\tan(x)+1}{2}} \frac{dt}{2t^2-2t+1}$.
   - Montrer que f est dérivable sur I et caluler sa dérivée.
   - Donner une autre expression de $f(x)$.
   - En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{2t^2-2t+1}$.

Exercice 224 (Amel LUU)

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{t}}{1-t}dt$.
2. Soit

$$f \left\| \begin{array}{rcl} [0,\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{(\cos x)^2} \arccos\sqrt{t}dt - \int_0^{(\sin x)^2} \arcsin\sqrt{t}dt \end{array} \right.$$

   Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$. Déterminer f.

Exercice 225 (Damien MONTARNAL,Benjamin PAPAZIAN)

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{X^8+X^4+1}$.

Réponse : $1/4 \frac{1}{X^2-X+1} + 1/4 \frac{1}{X^2+X+1} - 1/2 \frac{-1+X^2}{X^4-X^2+1}$

Exercice 226 (Mélanie PERRUS)

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{2+\sin t+\cos t}dt$.

Exercice 227 (Eric PIERRE)

Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p \ln p}\cdot$ Etudier la suite (u_n).

Exercice 228 (Fabrice ROLANDO)

Déterminer les fonctions de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, vérifiant $\forall x, y, \in \mathbb{R}, (y-x) f(\frac{x+y}{2}) = \int_x^y f$. *Indication : Montrer que f est $\mathcal{C}^1$, puis fixer x (ou y) puis dériver par rapport à y (ou x).*

Exercice 229 (Silvère RUELLAN)

On considère une fonction $f > 0$ continue sur $[0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $I = \int_0^1 f$.

- Montrer qu'il existe une suite $a_0 = 0, a_1, \ldots a_n$ telle que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on ait $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f = \frac{I}{n}$.
- Déterminer la limite de $u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$. (*Réponse :* $\frac{1}{I} \int_0^1 u(fu)du$)

Exercice 230 (Alexandre VILLEDIEU, Sophie WU)

1. (cours)Enoncer et démontrer le théorème fondamental du calcul différentiel-intégral.
2. (exo) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle

$$F = \frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}\cdot$$

Réponse MAPLE : $1/9\ (X-1)^{-2} - 2/9\ (X-1)^{-1} + 1/9\,\frac{3+2\,X}{X^2+X+1} + 1/3\,\frac{X+1}{(X^2+X+1)^2}$

8 Algèbre linéaire, dimension finie

Quinzaine du 4 février au 1 mars 2002

Exercice 231 (Eric ABOUAF)

1. Limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin \frac{k\pi}{n+1}$? *Réponse :* $\frac{1}{\pi}\cdot$
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable, vérifiant $\int_0^1 f = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 232 (Nicolas BLOUMINE)

1. Cauchy-Schwarz.
2. Calculer $E(\sum_{k=1}^{10^9} \frac{1}{k^{2/3}})$. *Réponse :* 2997*, après comparaison avec une intégrale.*

Exercice 233 (Valentine BONNET)

1. (cours) Théorème de changement de variable.
2. (exo)Soit $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt\cdot$ Montrer qu'il existe des réels a et b tels que $I_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + O(\frac{1}{n^2})\cdot$

   Indication : faire 2 IPP successives. On trouvera $a = \frac{1}{2}$ *et* $b = \frac{-1}{4}\cdot$

Exercice 234 (Amandine BUFFAZ)

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^2}{(1+u^2)^2}du$. *Réponse :* $\dfrac{1}{4}\cdot$
2. Soit A la matrice de taille n qui ne comporte que des 1 sauf sur la dernière ligne où il n'y a que des $1-n$.
   - Calculer A^n *Réponse :* 0 *!*.
   - Montrer que pour tout $\lambda \neq 0$, $A_\lambda I$ est inversible. *Indication : chercher un polynôme annulateur de degré* 2

Exercice 235 (Nicolas CHAMPAGNE)

Soit $\mathcal{E} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_{n+3} = 2u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{R}^3$.

Exercice 236 (Marie CLAIRO)

1. On se place dans $\mathbb{R}^4$. Soit $E = \{(x,y,z,t), x+y+z+t=0\}$ et $F = \{(x,y,z,t) = x-2y+z-3t\}$. Déterminer une base de E, une base de F et $E \cap F$.
2. Soit $(P_0, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que pour tout i, $degP_i = i$. Montrer que c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 237 (Brice COUTURIER)

1. Cauchy-Schwarz.
2. Donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k+\sqrt{k}+1}{\ln k}\cdot$

Exercice 238 (Moez DAHRI)

1. Soient E et G deux espaces vectoriels de dimension finie, F un sev de E. On note $H = \{^f \in \mathcal{L}(E,G), F \subset \operatorname{Ker} f\}$. Montrer que H est un sev de $\mathcal{L}(E,G)$ et calculer sa dimension.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tel que $u^2 = 0$. Montrer que $\operatorname{rg} u \leq 2$.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $n = \dim E$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u n'a que des 0 sauf au dessous de la diagonale où il n'y a que des 1.

Exercice 239 (Clément FAUCHERRE)

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^2}\ln(1+x^2)dx$. *Réponse :* $\dfrac{5}{12}\ln 5 + \dfrac{1}{4}\ln 3 - \dfrac{4}{3}\ln 2\cdot$
2. CNS sur a et b pour que les vecteurs $\overrightarrow{u} = (a, a+b, b)$, $\overrightarrow{v} = (a+b, a, b)$ et $\overrightarrow{w} = (a-b, a+b, a)$. $(a, b \neq 0,\ 2a \neq b,\ 2a \neq -b)$

Exercice 240 (Sébastien GILIBERT)

1. (cours) Théorème fondamental du Calcul différentiel.
2. (exo) Soient $I = \displaystyle\int_0^1 t^4(1-t)^4 dt$ et $J = \dfrac{t^4(1-t)^4}{1+t^2}dt$.
   - Calculer I et J
   - Montrer que $\dfrac{I}{2} \leq J \leq I$.
   - Donner un encadrement de π.

Exercice 241 (Nicolas GUFFROY)

1. (cours) Montrer qu'un projecteur est une projection.

2. (exo) Soient $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$ et $e_3 = (0, 1, -1)$. On note $\delta = (e_1, e_2, e_3)$.
   - Soit $F = Vect(\delta)$. Trouver une base $\mathcal{B}$ de F.
   - Trouver une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$.
   - Soit $f \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y+z \end{array} \right.$. Montrer que $F = \operatorname{Ker} f$.

Exercice 242 (Alexandre ISAAZ)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ev. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $E = \operatorname{Im} g \oplus \operatorname{Ker} f$ et $F = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} g$. (*deux méthodes, dont une en montrant tout d'abord que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs*)

Exercice 243 (Priscille LANEYRIE)

On travaille dans $\mathbb{R}_n[X]$. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P = 0\}$. Trouver une base et un supplémentaire de E.

Exercice 244 (François LECOCQ)

1. Minkowski
2. Donner un équivalent simple de $\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$. *Réponse :* $\frac{\ln^2 n}{n}$.

Exercice 245 (Jean-François LEFEBVRE)

On travaille dans $\mathbb{R}^4$. Soit $E = \{(x, u, z, t), t = x - y\}$. Trouver une base et un supplémentaire de E.

Exercice 246 (Damien LOUBET)

Soient p et q des projecteurs.
- Montrer : $p \circ q + q \circ p = 0 \Leftrightarrow p \circ q = p \circ q = 0$.
- CNS pour que $p + q$ soit un projecteur.
- Si c'est le cas, montrer les égalités : $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ et $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Exercice 247 (Benjamin PAPAZIAN)

Montrer : $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ supplémentaires $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(f \circ f) = \operatorname{Im} f$.

Exercice 248 (Paul WILCZYNSKI)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. Montrer qu'il existe un x, $(x, x^2$..... (NDLR : je sais pu) rg, im ker u .

Exercice 249 (Sophie WU)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $X = \{f \mid u \circ f = 0\}$.
- Montrer que X est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ? *Indication : utiliser l'application $f \mapsto f_{|\operatorname{Ker} f}$ après justification.*
- Quid de $X' = \{f \mid f \circ u = 0\}$

9 Algèbre linéaire, matrices

Quinzaine du 4 au 15 mars 2002

Exercice 250 (Laurent BLANC)

Soit $u : (x, y, z) \mapsto (-x + y + z, -x - y, x - z)$.

- Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u s'écrit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Expression de $u^n(x, y, z)$.

Exercice 251 (Nicolas BLOUMINE)

Noyaux itérés ...

Exercice 252 (Jérome BOLLARD)

1. Calculer $\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{t}}{1-t^2}$. *Réponse :* $\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n et B^n.

Exercice 253 (Valentine BONNET)

1. (cours) Enoncé et preuve de la formule de Taylor
2. (exo) Montrer que la famille $(1, (X-\alpha), \ldots, (X-\alpha)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 254 (Amandine BUFFAZ)

Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .....

Exercice 255 (Florent CARUZZI)

Soit $\Phi \left\| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & PM \end{array} \right.$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Linéarité ?
- Image et noyau ? Même chose avec $\Phi' : \mathcal{M}_{2,p}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,p}(\mathbb{R})$.
- Matrice de Φ dans la base canonique ?
- Que dire de Φ^2, Φ^3, ... (noyau, image) ?

Exercice 256 (Marie CLAIRO)

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de u dans la base canonique. En utilisant la base (f_1, f_2, f_3) où $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 + e_3$ et $f_3 = e_2 + e_3$, calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 257 (Violette COQUATRIX-HENRIOT)

On appelle E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, où $M(a, b)$ est la matrice qui est consistuée de a sur la diagonale et de b partout ailleurs.
- Montrer que E est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Donner la dimension de E.
- Montrer que E est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 258 (Brice COUTURIER)

On note $H_k = \frac{X(X-1)\ldots(X-k+1)}{k!}$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $P(a) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists \lambda_0, \ldots \lambda_n \in \mathbb{Z}, P = \lambda_0 H_0 + \ldots + \lambda_n H_n$.

Exercice 259 (Moez DAHRI)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qui n'est pas une homothétie :

$$A = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}.$$

Soit $\varphi \left\| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array} \right.$

- Ecrire la matrice de φ dans la base canonique.
- Donner deux matrices linéairement indépendantes de $\operatorname{Ker} \varphi$.
- Trouver le rang de φ et en déduire $\operatorname{Ker} \varphi$.

Exercice 260 (Julien DESMONT)

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\sin 2x}{\cos x - \sin x} dx$.

Exercice 261 (Clément FAUCHERRE)

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n. *Indication : chercher un polynôme annulateur de degré* 2
2. Résoudre le système :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = u_n - v_n \\ v_{n+1} & = u_n - 2v_n \end{cases}$$

   Indication : poser ....

Exercice 262 (Alvaro FERNANDEZ)

Soit $F = \mathbb{R}^{[\![1,n]\!]}$. Quelle est la dimension de F ?
Indication : montrer que $(u_1, \dots u_n)$ *est une base, avec* $u_i =$??.

Exercice 263 (Sébastien GILIBERT)

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \{X \mid MX = XM\}$.

- Montrer que f est un sev, en trouver une base $\mathcal{B}_1$.
- Trouver $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ telle que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_0$ soit une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 264 (Bénédicte GILLOT)

Soit E un $\mathbb{R}$ev de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On désigne par f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base$\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

- Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et sa dimension. Même chose pour $\operatorname{Im} f$.
- Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.

Exercice 265 (Solal GUIRAND, Damien LOUBET)

Soit $n \geq 2$, On note A la matrice de taille n qui ne contient que des 1 sauf la diagonale qui vaut 0.

- Montrer que A est inversible, et exprimer A^{-1} en fonction de A, I et n.
- Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer A^p en fonction de A, I, n et p.

Exercice 266 (Alexandre ISAAZ)

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On note $f_i(x) = \sin(x + i)$ pour $i \in [\![1, 3]\!]$. Quel est le rang de (f_1, f_2, f_3) dans E ? *Réponse : 2.*

Exercice 267 (Un INCONNU)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donner l'expression de A^n pour $n \geq 2$. Montrer que la formule est également valable pour $n = -1$.

Exercice 268 (Priscille LANEYRIE)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$. Donner l'expression de A^n.

Exercice 269 (François LECOCQ)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, et A un polynôme tel que $deg(A) \in [\![1, n]\!]$. On note $F = \{P; A|P\}$. Montrer que F est un sev, en trouver un supplémentaire G, en déduire la dimension de F.

Exercice 270 (Jaime LEZAMA)

1. (cours) Théorème du rang
2. (exo) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{H} \oplus i\mathcal{H}$? ? ?

Exercice 271 (Florence LOUIS)

Soit E l'ensemble des suites réelles vérifiant $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$. Montrer que E est un sev de l'ensemble des suites réelles F isomorphe à $\mathbb{R}_2$. Trouver une base immédiate de E. Expliciter les suites de E.

Exercice 272 (Amel LUU)

1. Soit $P_i = X^{n-i}(X+1)^i$. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $\{P \in \mathbb{R}_n[X], P(0 = P(1) = 0\}$. Quelle est la dimension de E ?

Exercice 273 (Mélanie PERRUS)

Soit $f \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) + P(X-1) - 2P(X) \end{array} \right.$. Montrer que f est un endomorphisme et déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 274 (Eric PIERRE)

Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- Montrer que f est bijective.
- Calculer A^2 en fonction de A et I. En déduire f^{-1} en fonction de f et Id.
- On note $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_2 - e - 3$, et $v_3 = e_1 + e_2 - e_3$. Montrer que ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 275 (Fabrice ROLANDO)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A = aI_n + X^tX$, avec $a \in \mathbb{K}$ et $X = (x_1 \ldots x_n)$ (colonne !). Calculer A^n et le rang de A.

Exercice 276 (Sylvère RUELLAN)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer le rang de A
- Soit $v_1 = e_1 - e_2 - e_3$, $v_2 = -e_1 + e_2 + 2e_3$, $v_3 = e_1 - e_3$. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}_3$.

- Determiner la matrice A' représentant u dans la base (v_1, v_2, v_3).
- Calculer A^n.

Exercice 277 (Alexandre VILLEDIEU)

Calculer $\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{t}}{1-t^2}$. *Réponse :* $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 278 (Paul WILCZYNSKI, Nicolas GUFFROY)

On considère la matrice A triangulaire supérieure dont les coefficients non nuls sont les C_{i-1}^{j-1} $(j \geq i)$.
- Montrer qu'il existe une application $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ dont la matrice dans la base canonique est A.
- En déduire A^{-1}, puis A^p.

Exercice 279 (Sophie WU)

1. (cours) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r. Montrer qu'il existe des matrices $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, telles que $QAP = J_r$.
2. (exo) Calculer $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$.

10 Matrices, fonctions convexes, intégrales impropres

Quinzaine du 18 au 29 mars 2002

Exercice 280 (Eric ABOUAF)

Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{R}_3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$
- Calculer f^3.
- On pose $e_1' = e_1 \cos\theta$, $e_2' = f(e_1)$; $e_3' = f(e_2)$. Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathcal{R}^3$.
- Déterminer la matrice de f dans la base (e_1', e_2', e_3').

Exercice 281 (Jean-Baptiste BARTH)

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- Montrer que A est inversible. On exprimera A^{-1} en fonction de I, A et A^2.
- Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 282 (Laurent BLANC)

1. (cours) Montrer que si f et g sont deux fonctions de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$ et $f = o(g)$ au voisinage de $+\infty$ et f n'est pas intégrale sur $[0, +\infty[$, alors :
$$\int_0^x f = o\Big(\int_0^x g\Big).$$
2. (exo) Déterminer un équivalent simple de $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+12}$. (*Réponse* $2\sqrt{n}$)

Exercice 283 (Nicolas BLOUMINE, Violette COCQUATRIXHENRIOT)

Pour $n \in N^*$, on pose $u_n = \int_0^{\pi/4} \sqrt[n]{tanx}dx$. Etudier la suite u_n . (*Réponse : elle converge vers* $\pi/4$).

Exercice 284 (Jérome BOLLARD)

- . Calculer $\int_0^{\pi} \ln \sin t dt$ après avoir justifié l'existence.
- Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$ après avoir justifié l'existence.

Exercice 285 (Marie CLAIRO)

Soit $E = R^3$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} -8 & -8 & -12 \\ -2 & 0 & -2 \\ 9 & 8 & 13 \end{pmatrix}$.

– Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Ker} f$.
– Donner une base de $\operatorname{Im} f$.
– Montrer que $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = E$.
– On pose $v_1 = e_1 - e_3$, $v_2 = -6e_2 + 3e_3$, $v_3 = 2e_1 + e_2 - 2e_3$. Montrer que ces vecteurs forment une base de E, dans laquelle on exprimera la matrice de f.

Exercice 286 (Brice COUTURIER)

- Soit f continue, convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\frac{x}{x}$ tend soit vers une limite réelle, soit vers $+\infty$. Exemples.
- On suppose que f est convexe sur $\mathbb{R}$ et que $\frac{f(x)}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$. Montrer que $f(x)$ tend vers une limite réelle ou alors vers $-\infty$.

Exercice 287 (Moez DHARI)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, définie par $f(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{t}}$.

– Montrer que $\int_{\varepsilon}^{a} f(t)dt$ a une limite finie lorsque ε tend vers 0 et a tend vers $+\infty$.
– Montrer que f n'est pas intégrable sur R_+^* .

Exercice 288 (Clément FAUCHERRE)

1. (cours) Définition d'une fonction convexe.
2. (exo) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{M}_4(R)$ telle que $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   – Montrer que M est inversible.
   – Calculer M^{-1} par une première méthode. Retrouver le résultat par une méthode polynomiale.

Exercice 289 (Florence FERLAY)

Soit $\alpha > 0$, on définit $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^\alpha}\right)$.

– Etudier l'intégrabilité de f sur $[0, +\infty[$.
– Calculer "l'intégrale de f " sur $]0, +\infty[$ quand $\alpha = 2$.

Exercice 290 (Solal GUIRAND)

Soit $E = \mathbb{R}_5[X]$. Soient $P, Q \in E$, on définit $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

– Montrer que E muni de φ est un espace euclidien.
– Déterminer la projection orthogonale de X^5 sur $R_2[X]$.

Exercice 291 (Alexandre ISAAZ, Fabrice ROLANDO)

Existence et calcul de $\int_0^2 \frac{x+3}{\sqrt{x(2-x)}} dx$. (*Réponse :* 4π)

Exercice 292 (Priscille LANEYRIE)

1. (cours) Définition d'une fonction convexe.
2. (exo) Montrer que $f(t) = \ln t^2$ est intégrable sur $]0,1]$. Calculer son intégrale. (*Réponse : 2*)

Exercice 293 (JeanFrançois LEFEVBRE)

- Discuter l'intégrabilité de $\mathrm{e}^{-|\ln x|^\alpha}$ sur $]0,+\infty[$, $\alpha > 0$.
- Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, avec f' croissante. Montrer que f est convexe.

Exercice 294 (Jaime LEZAMA)

1. (cours) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, convexe, telle que $f'(x_0) = 0$. Montrer que f admet un minimum global en x_0.
2. (exo) On considère un cercle de rayon R. On place trois points A, B, C sur ce cercle. Déterminer le périmètre maximal du triangle ABC. *réponse :* $3\sqrt{R}$

Exercice 295 (Damien LOUBET)

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\sqrt{t}}$.

Exercice 296 (Florence LOUIS)

Etudier $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}dt.$$

Indication : après avoir justifié l'existence et réduit le domaine d'étude, on montre que cette fonction est constante de valeur $\pi/4$.

Exercice 297 (Leila LUTGEN)

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On définit, pour $x \in [1,+\infty[$, la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)}$.

- Discuter selon les valeurs de α et β l'intégrabilité de f.
- Calculer $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^\beta)}dt$.

Exercice 298 (Amel LUU)

A partir de la convexité de la fonction exponentielle, montrer l'inégalité de Holder.

Exercice 299 (Damien MONTARNAL)

- Soit $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^2, P \mapsto (P(1), P(2))$. Déterminer une base de $Ker\Phi$ et une base de $Im\Phi$.
- Soit $A \in M_n(R)$ qui ne contient que des 1 sauf sur la dernière ligne où il n'y a que des $1-n$.
  - Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
  - Montrer que $A - I_n$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 300 (Benjamin PAPAZIAN)

Soit $I = \displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du$.

- Justifier l'existence de I.
- Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{1/\pi} \sin\frac{1}{x}$. Montrer ensuite $I = \displaystyle\int_0^{1/\pi} \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx$.

Exercice 301 (Mélanie PERRUS)

- Trouver un équivalent en $+\infty$ de $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n-k}}$.
- Justifier l'existence et calculer $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$
- Discuter l'existence de $\int_0^\pi \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$.

Exercice 302 (Alexandre VILLEDIEU)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue à valeurs strictements positives. Montrer :

$$\forall a > 0, f(x)a^x convexe \Leftrightarrow \ln f convexe$$

.

Exercice 303 (Paul WILCZYNSKI)
Existence et calcul de $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1 + \mathrm{e}^t}{e^{2t} + 2\mathrm{e}^t + 1} dt$. (*Réponse* $\ln 3 - \ln 2$)

11 Intégrales impropres, déterminants

Quinzaine du 1er au 26 avril 2002

Exercice 304 (Eric ABOUAF)
Calculer la matrice dans la base canonique de la réflexion par rapport à $x + y - t = 0$.

Exercice 305 (Jean-Pascal BIGOT)

- Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$ (*Réponse :* $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.)
- $\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$ est-elle intégrable sur $[0, 1]$?

Exercice 306 (Laurent BLANC)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E espace euclidien. Montrer :

$$\exists! v \in \mathcal{L}(E), \forall x, y \in E, < u(x)|y >=< x|v(y) > .$$

Remarque : ce v est appelé l'adjoint de l'endomorphisme u.

Exercice 307 (Valentine BONNET, Jean-Baptiste BARTH)

- Justifier l'existence et calculer $I = \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^x \ln(1 - \mathrm{e}^x) dx$.

  Réponse : -1
- *Soit* $f \in \mathcal{C}([1, +\infty[)$, intégrable sur $]1, +\infty[$. Montrer que $\frac{f(t)}{t}$ est intégrable et $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \leq \Big(\int_1^{+\infty} f^2\Big)^{1/2}$.

Exercice 308 (Amandine BUFFAZ)
Soit $F = \mathrm{Vect}\big((1, 0, 1, -1), (1, 1, 1, 1)\big)$. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F, puis celle de la symétrie orthogonale par rapport à F.

Exercice 309 (Florent CARUZZI)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\forall x \in E, \|x\| \leq \|x\|$.
– Exemples ?

– Montrer que si $u \in \operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}) \cap \operatorname{Im}(f-\mathrm{Id})$, alors $\exists v, f(v)=v+u$.
– Exprimer alors $f^n(v)$ à l'aide de v et $f(u)$, puis montrer que $u=0$.
– Montrer que $E=\operatorname{Ker}(f-Id) \oplus \operatorname{Im}(f-\mathrm{Id})$.

Exercice 310 (Nicolas CHAMPAGNE)

- $\dfrac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$ est-elle intégrable sur $[0,1]$?
- Soit $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, convexe, $f(x) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que f est décroissante et positive.

Exercice 311 (Marie CLAIRO)

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$.
– f est-elle intégrable sur $]0,1]$?
– Montrer que $\displaystyle\int_1^x f(t)dt$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$.
– Montrer que f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

Exercice 312 (Brice COUTURIER)

Soit $f : [0,\frac{1}{2}[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{1-3t+2t^2}\right)$. Montrer que f est intégrable sur $[0,\frac{1}{2}[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t)dt$.

Réponse $1-\dfrac{\ln 2}{2}$.

Exercice 313 (Julien DESMONT)

Soient f et g à valeurs réelles et dans $\mathcal{C}([-1,1])$, et $< f|g >= \displaystyle\int_0^1$.
– Montrer que $< -|- >$ est défini.
– Montrer que c'est un produit scalaire.
– Montrer que si T_n est tel que $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$, à n fixé, alors $\forall m \neq n, < T_n|T_m >= 0$.

Exercice 314 (Clément FAUCHERRE, Alexandre VILLEDIEU)

Minimiser $I(a,b)=\displaystyle\int_0^\pi (t-a\cos t - b\sin t)^2 dt$.

Réponse : $\dfrac{\pi^3}{3}-\dfrac{8}{\pi}-2\pi$.

Exercice 315 (Florence FERLAY)

Soit E un espace euclidien. Soit $u : E \to E$ vérifiant $u(0_E)=0_E$ et $\forall (x,y) \in E^2, \|u(x)-u(y)\| = \|x-y\|$.
– Montrer que $\forall (x,y) \in E^2, < u(x)|u(y) >=< x|y >$.
– Montrer que u est un endomorphisme de E.
– Montrer que u est un automorpisme de E.

Exercice 316 (Sébastien GILIBERT)

1. (cours) projections orthogonales.
2. (exo) Soit f une fonction continue et croissante, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose $f(x) \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$ et $f(x) \underset{-\infty}{\longrightarrow} b$. On pose $g(t)=f(t+1)-f(t)$.
   – Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   – Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$.

Exercice 317 (Bénédicte GILLOT)

Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté φ. On désigne par u un endomorphisme de E tel que $\varphi(u(x), x) = 0$ pour tout x de E.

- Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(u(x), y) = -\varphi(x, u(y)$.
- En déduire $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$

Exercice 318 (Nicolas GUFFROY)

Calculer le déterminant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \frac{1}{a_1+b_3} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \frac{1}{a_2+b_3} \\ \frac{1}{a_3+b_1} & \frac{1}{a_3+b_3} & \frac{1}{a_3+b_3} \end{pmatrix}$$

Réponse : $\dfrac{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(b_1-b_2)(b_1-b_3)(a_2-a_3)(b_2-b_3)}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)(a_2+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_3)(a_3+b_1)(a_3+b_2)(a_3+b_3)}$.

Exercice 319 (Solal GUIRAND)

Calculer sous forme factorisée le déterminant de la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X & Y & Z \\ X^4 & Y^4 & Z^4 \end{pmatrix}$

Exercice 320 (Alexandre ISAAZ)

- Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}dt$.
- Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$ sous forme factorisée.

Exercice 321 (Fabrice ROLANDO)

Soit E un espace euclidien, p un projecteur de E. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont orthogonaux.
2. $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 322 (Sylvère RUELLAN)

- Calculer sous forme factorisée le déterminant de $M = \begin{pmatrix} 1 & b+c & bc \\ 1 & c+a & ca \\ 1 & a+b & ab \end{pmatrix}$.

  Réponse $(a-b)(a-c)(b-c)$.
- Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien, donner la matrice représentant la réflexion par rapport à $x+y-z-3t = 0$ dans la base canonique.

Exercice 323 (Paul WILZYNSKI)

Soient $P, Q \in E = \mathbb{R}_4[X]$. On définit $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x) + P'(x)Q'(x)dx$

- Montrer que φ confère à E une structure d'espace euclidien.
- Calculer la projection orthogonale de $t \mapsto t^4$ sur $F = R_1[X]$ sev de E.

  Réponse : $t \mapsto \dfrac{64}{65}t - \dfrac{19}{65}$.

Exercice 324 (Sophie WU)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u(0_E) = 0_E$ et $\forall x, y, \|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$.
– Montrer que u conserve le produit scalaire.
– Montrer que $u \in O(E)$.

12 Déterminants, Equations différentielles linéaires

Quinzaine du 29 avril au 10 mai 2002

Exercice 325 (Jean-Baptiste BARTH)
Résoudre $y'' + y = \cos^3 t$.

Exercice 326 (Jean-Pascal BIGOT)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 4\varepsilon y' + 4y = \mathrm{e}^{-2t}$ pour $\varepsilon = \pm 1$.

Exercice 327 (Laurent BLANC)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = \cos x$ et donner les solutions bornées.

Exercice 328 (Nicolas BLOUMINE)
Etude de la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = & t^2 + t \\ y(t) = & 2t + 1 \end{cases}$$

Exercice 329 (Jérome BOLLARD)
Résoudre l'équation différentielle $(x^2 + x)y' + (x + 1)y = 1$ en effectuant éventuellement des recollements.

Exercice 330 (Amandine BUFFAZ)
Résoudre $t^3 y' - 2y = 0$ et $y' + \tan t\ y = \cos t$.

Exercice 331 (Florent CARUZZI)
Calculer le déterminant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \frac{1}{a_1+b_3} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \frac{1}{a_2+b_3} \\ \frac{1}{a_3+b_1} & \frac{1}{a_3+b_3} & \frac{1}{a_3+b_3} \end{pmatrix}$$

Réponse : $\dfrac{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(b_1-b_2)(b_1-b_3)(a_2-a_3)(b_2-b_3)}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)(a_2+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_3)(a_3+b_1)(a_3+b_2)(a_3+b_3)}$.

Exercice 332 (Marie CLAIRO)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 x$.

Exercice 333 (Brice COUTURIER)
Résoudre l'équation différentielle $x(x-1)y'(x) - 2y(x) = x - 1$.

Exercice 334 (Moez DAHRI)
On travaille dans $\mathbb{R}^3$ euclidien. Soient P_1 et P_2 les hyperplans d'équations : $P_1 : x - y + z = 0$, $P_2 : x + 2y = 0$. Soient s_1 et s_2 les réflexions respectivement par rapport à P_1 et P_2.
– Donner la matrice dans la base canonique de $s_1 o s_2$.

– Caractériser $s_2 o s_1$.

Exercice 335 (Clément FAUCHERRE)

- Calculer le déterminant de la matrice : $\begin{pmatrix} \mathrm{C}_n^0 & \mathrm{C}_n^1 & \mathrm{C}_n^2 \\ \mathrm{C}_{n+1}^0 & \mathrm{C}_{n+1}^1 & \mathrm{C}_{n+1}^2 \\ \mathrm{C}_{n+2}^0 & \mathrm{C}_{n+2}^1 & \mathrm{C}_{n+2}^2 \end{pmatrix}$
- Résoudre $|x|\,y' - 2x^3 y = x^4$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 336 (Sébastien GILIBERT)

Résoudre sur $]0,2[$ l'équation $x(2-x)y' + (1-x)y = 1$.

Exercice 337 (Bénédicte GILLOT)

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 2\operatorname{ch} x$.

Exercice 338 (Mickaël KEPENEKIAN)

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $\cos x\ y' + \sin x\ y + \sqrt{y} = 0$.

Exercice 339 (Jaime LEZAMA)

Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 6y = x\mathrm{e}^{2x}$.

Exercice 340 (Damien LOUBET)

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} x''(t) &= 3x(t) + y(t) + \mathrm{e}^t \\ y''(t) &= 2x(t) + 2y(t) + \mathrm{e}^{2t} \end{cases}.$$

Pour cela, on écrira ce système sous forme matricielle ; on considérera ensuite $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, on calculera $P^{-1}AP$. On posera enfin $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = PY$ avec $Y = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ et ensuite on se débrouillera.

Exercice 341 (Amel LUU)

Résoudre $y' \sin 2x + 2y = 2\cos x$.

Exercice 342 (Mélanie PERRUS)

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle et de son orientation usuelle. Soit $k \in \mathbb{R}^3$, $\|k\| = 1$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. On désigne par u la rotation de $\mathbb{R}^3$ dont l'axe des orienté par k et dond l'angle est θ.

– Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^3, u(x) = \cos\theta x + \sin x k \wedge x + 2 < x|k > \sin^2 \dfrac{\theta}{2} k$.

– Soit $k = \dfrac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \pi/3$. Donner la matrice de u dans la base canonique.

Exercice 343 (Alexandre VILLEDIEU)

- Discuter suivant les valeurs de λ le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix}$.
- Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = 6x + 1 + 4\mathrm{e}^x + 7\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 344 (Paul WILCZYNSKI)

Soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Caractériser v à l'aide de sa matrice dans $\mathcal{E}$: $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$.

Exercice 345 (Sophie WU)
Résoudre l'équation $y'' - 2y' + y = t \operatorname{sh} t$.

13 Groupe orthogonal, courbes paramétrées, géométrie affine euclidienne

Quinzaine du 13 au 24 mai 2002

Exercice 346 (Jean-Baptiste BARTH)
Etude locale en 0 de la courbe définie par :

$$\begin{cases} x(t) = & \mathrm{e}^t - 1 - t - \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^3}{3} \\ y(t) = & \mathrm{e}^{t^2} - t^2 \end{cases}$$

Exercice 347 (Laurent BLANC)
Dans le plan, on note D_1 la droite d'équation $y = x$, $D_2 : y = 2x$, $D_3 : y = 3x$. Pour $i \in 1, 2, 3$, on note s_i la symétrie d'axe D_i. Etudier $s_3 \circ s_2 \circ s_1$.

Exercice 348 (Nicolas BLOUMINE)
Etude de la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = & \dfrac{t}{t^2 - 1} \\ y(t) = & \dfrac{t}{(t-1)(t+2)} \end{cases}$$

Exercice 349 (Jérome BOLLARD)
Etude de la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = & \sin t \\ y(t) = & \dfrac{\cos^2 t}{2 - \cos t} \end{cases}$$

Exercice 350 (Sébastien GILIBERT)
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, u endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. On suppose que u est une rotation. Montrer que a, b, c vérifient une équation unitaire du 3-ième degré dont on donnera un encadrement du terme constant.

Exercice 351 (Damien LOUBET)
Etude de la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = & \dfrac{t^2}{t+1} \\ y(t) = & \dfrac{1}{(t+1)(t-2)} \end{cases}$$

Exercice 352 (Mélanie PERRUS)

1. (cours) Coordonnées de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{A}$ pour les courbes en polaire.

2. (exo) Théorème de Ménélaïus. Soit un triangle ABC. On place P sur (BC), Q sur (AC), R sur (AB). Montrer :

$$P, Q, R \text{ alignés } \iff \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$$

Exercice 353 (Fabrice ROLANDO)

Etude de la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = & \dfrac{t^2}{t-1} \\ y(t) = & \dfrac{t^3}{t-1} \end{cases}$$

Exercice 354 (Sylvère RUELLAN)

1. (cours) Théorie des entiers fondamentaux (points non biréguliers des courbes paramétrées).
2. (exo) On considère l'espace affine $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Déterminer les équations de Δ, droite passant par $A(1,1,1)$ et coplanaire avec D_1 et D_2 d'équations respectives :

$$D_1 : \begin{cases} x = & z+1 \\ y = & z+2 \end{cases}, D_2 : \begin{cases} x+y+z & = 4 \\ x+2y+3z & = 7 \end{cases}$$

Exercice 355 (Sophie WU)

Caractériser $(x, y, z) \mapsto (-\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + 3, -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + 3, \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + z - 3)$

Réponse : on trouvera une affinité de rapport -2, de direction $\mathbb{R}(1,1,1)$, de base $\{(1,-1,0),(0,0,1)\}$

14 Quinzaine 14

Quinzaine du 27 mai au 7 juin 2002

15 Quinzaine 15

Quinzaine du 10 au 21 juin 2002