1 Presque du cours

No comment

2 Un prolongement $\mathcal{C}^1$

On a $f(x) = \dfrac{\sin x - \ln(1+x)}{\ln(1+x)\sin x}\cdot$ Le dénominateur est équivalent à x^2 en 0, et un DL à l'ordre 2 fournit :

$$\sin x - \ln(1+x) = x - \left(x - x^2/2\right) + o(x^2) = x^2/2 + o(x^2) \sim x^2/2,$$

donc $f(x) \sim \dfrac{1}{2}$, puis :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

de sorte qu'on peut prolonger f en une application continue sur $[0,1]$ en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}\cdot$

f, est alors continue sur $[0,1]$ par construction, et dérivable sur $]0,1]$. Pour montrer à la fois la dérivabilité de f et la continuité de f' en 0, le théorème de la limite de la dérivée nous assure qu'il suffit de montrer que $f'(t)$ admet une limite réelle lorsque t tend vers 0^+. On écrit donc pour $t > 0$:

$$f'(t) = -\frac{1}{(1+t)\ln^2(1+t)} + \frac{\cos t}{\sin^2 t} = \frac{\cos t(1+t)\ln^2(1+t) - \sin^2 t}{\ln^2(1+t)\sin^2 t}\cdot$$

Le dénominateur est équivalent à t^4, donc on fait un DL du numérateur à l'ordre 4 :

$$\sin^2 t = t^2\left(1 - t^2/6 + o(t^2)\right)^2 = t^2\left(1 - t^2/3 + o(t^2)\right) = t^2 - t^4/3 + o(t^4).$$

$$\begin{aligned}\ln^2(1+t) &= t^2\left(1 - t/2 + t^2/3 + o(t^2)\right)^2 = t^2\left(1 - t + 2t^2/3 + t^2/4 + o(t^2)\right)\\ &= t^2\left(1 - t + 11t^2/12 + o(t^2)\right)\end{aligned}$$

et

$$(1+t)\cos t = (1+t)\left(1 - t^2/2 + o(t^2)\right) = 1 + t - t^2/2 + o(t^2),$$

donc :

$$\begin{aligned}\cos t(1+t)\ln^2(1+t) &= t^2\left(1 + t - t^2/2 + o(t^2)\right)\left(1 - t + 11t^2/12 + o(t^2)\right)\\ &= t^2\left(1 - 7t^2/12 + o(t^2)\right).\end{aligned}$$

Ainsi, le numérateur de $f'(t)$ vaut $(-7/12 + 1/3)\, t^4 + o(t^4) \sim -\dfrac{t^4}{4}$, et donc $f'(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{4}$: c'est gagné. $\blacksquare$

3 Jouons dans $\mathbb{R}^4$

1. (a) Fixons $\overrightarrow{f} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ et cherchons si $\overrightarrow{f}$ peut se décomposer sous la forme $\alpha_1\overrightarrow{f_1} + \cdots + \alpha_5\overrightarrow{f_5}$, en résolvant sans génie ni initiative malheureuse un système :

$$\overrightarrow{f} = \alpha_1\overrightarrow{f_1} + \cdots + \alpha_5\overrightarrow{f_5} \iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 - \lambda_5 = x \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + 5\lambda_4 - 2\lambda_5 = y \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 16\lambda_4 - \lambda_5 = z \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + 25\lambda_4 - 2\lambda_5 = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 - \lambda_5 = x \\ \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = y - 2x \\ 5\lambda_2 - 2\lambda_3 + 7\lambda_4 + 2\lambda_5 = z - 3x \\ 7\lambda_2 - 2\lambda_3 + 13\lambda_4 + 2\lambda_5 = t - 4x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 - \lambda_5 = x \\ \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = y - 2x \\ 3\lambda_3 + 12\lambda_4 + 2\lambda_5 = z - 5y + 7x \\ 5\lambda_3 + 20\lambda_4 + 2\lambda_5 = t - 7y + 10x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 - \lambda_5 = x \\ \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = y - 2x \\ 3\lambda_3 + 12\lambda_4 + 2\lambda_5 = z - 5y + 7x \\ - 4\lambda_5 = 3t - 5z + 4y - 5x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_5 = x - 3\lambda_4 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = y - 2x + \lambda_4 \\ 3\lambda_3 + 2\lambda_5 = z - 5y + 7x - 12\lambda_4 \\ - 4\lambda_5 = 3t - 5z + 4y - 5x \end{cases}$$

Ce système possède toujours une solution (en fait, une infinité, paramétrées par λ_4), donc $\mathcal{F}$ est génératrice.

(b) Déjà, intuitivement, il s'agit d'une famille de cinq vecteurs de $\mathbb{R}^4$, donc elle est probablement liée ! Le cours sur la dimension finie nous dira bientôt que c'est en effet « plus que probable ». Il s'agit ici de savoir si $\alpha_1\overrightarrow{f_1} + \cdots + \alpha_5\overrightarrow{f_5} = \overrightarrow{0}$ implique $(\lambda_1, ..., \lambda_5) = (0, ..., 0)$. Mais le travail précédent fournit :

$$\alpha_1\overrightarrow{f_1} + \cdots + \alpha_5\overrightarrow{f_5} = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_5 = -3\lambda_4 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = \lambda_4 \\ 3\lambda_3 + 2\lambda_5 = -12\lambda_4 \\ - 4\lambda_5 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_3 - 3\lambda_4 = -2\lambda_4 \\ \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4 = -3\lambda_4 \\ \lambda_3 = -4\lambda_4 \\ \lambda_5 = 0 \end{cases}$$

Ce système possède pour solution $(-2, -3, -4, 1, 0)$, fournissant la combinaison linéaire nulle non triviale :

$$-2\overrightarrow{f_1} - 3\overrightarrow{f_2} - 4\overrightarrow{f_4} + \overrightarrow{f_4} = \overrightarrow{0},$$

et $\mathcal{F}$ est donc liée.

Mais comment l'auteur du sujet a-t-il fait pour trouver ces vecteurs ? `:-)`

2. (a) Left to the reader...

(b) Il suffit de résoudre l'équation $f(x,y,z,t) = (0,0,0,0)$ en pivotant calmement ET SANS ASTUCE BIDON, pour trouver finalement $f(x,y,z,t) = (0,0,0,0)$ si et seulement si $\begin{cases} x = -7t - y \\ z = 3t \end{cases}$ de sorte que :

$$\operatorname{Ker} f = \left\{(-\alpha - 7\beta, \alpha, 3\beta, \beta) \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} = \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}\right),$$

avec $\overrightarrow{g_1} = (-1, 1, 0, 0)$ et $\overrightarrow{g_2} = (-7, 0, 3, 1)$.

La famille $(\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2})$ constitue une famille génératrice de $\operatorname{Ker} f$, et est clairement libre (deux vecteurs non colinéaires) : c'est donc une base du noyau de f.

(c) Il s'agit ici de résoudre l'équation $f(x,y,z,t) = (X,Y,Z,T)$. Plus précisément de savoir s'il existe une solution. Mais un pivot sans finesse fournit :

$$f(x,y,z,t) = (X,Y,Z,T) \iff \begin{cases} x + 2y + y + t = X \\ \quad - 5z \quad + 15t = Z - X \\ \qquad\qquad 0 = Y - 2X \\ \qquad\qquad 0 = T - Z - 2X \end{cases}$$

Ce système possède une solution si et seulement si les deux conditions de compatibilités sont vérifiées, c'est-à-dire :

$$(X,Y,Z,T) \in \operatorname{Im} f \qquad \iff \qquad \begin{cases} Y = 2X \\ T = Z + 2X \end{cases}$$

C'est la (une) CNS recherchée.

La résolution de ce dernier système n'est pas trop compliquée :

$$\operatorname{Im} f = \left\{ (\alpha, 2\alpha, \beta, \beta + 2\alpha) \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2} \right),$$

avec $\overrightarrow{h_1} = (1,2,0,2)$ et $\overrightarrow{h_2} = (0,0,1,1)$.

La famille $\left(\overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2} \right)$ constitue une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$, et est clairement libre (deux vecteurs non colinéaires) : c'est donc une base de l'image de f.

(d) Le calcul précédent nous assure que l'image de f est le noyau de l'application :

$$\varphi_1 \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (X,Y,Z,T) & \longmapsto & (2X - Y, 2X + Z - T) \end{array} \right. .$$

$\operatorname{Ker} f$ est engendré par $(\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2})$, donc est l'image de l'application linéaire :

$$\varphi_2 \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & \alpha \overrightarrow{g_1} + \beta \overrightarrow{g_2} \end{array} \right. .$$

(e) On est dans la situation idéale pour calculer une intersection : on va paramétrer les éléments de l'un des deux ensembles et voir ceux qui vérifient les équations cartésiennes définissant l'autre.

Il s'agit donc de chercher les $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi_1(\alpha \overrightarrow{g_1} + \beta \overrightarrow{g_2}) = (0,0)$, c'est-à-dire $\alpha \varphi(\overrightarrow{g_1}) + \beta \varphi(\overrightarrow{g_2}) = (0,0)$, soit encore : $\alpha(-3,-2) + \beta(-14,-12) = (0,0)$, ce qui est facilement équivalent à $\alpha = \beta = 0$ (résolution d'un système, ou raisonnement géométrique). Ainsi :

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{ \overrightarrow{0} \}.$$

4 Polynômes konpadnom

1. (a) Dans la somme fournie par la formule du binôme, on sépare les indices $k \leq n-1$ (pour lesquels $2n-1-k \geq n$, permettant de factoriser $(1-X)^n$) et les indices $k \geq n$ (pour lesquels $k - n \geq 0$, permettant de factoriser X^n) :

$$\begin{aligned} ((1-X)+X)^{2n-1} &= \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{2n-1-k} \\ &= (1-X)^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k} + X^n \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^{k-n} (1-X)^{2n-1-k} \\ &= (1-X)^n F_n + X^n G_n, \end{aligned}$$

avec explicitement :

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k} \qquad \text{et} \qquad G_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^{k-n} (1-X)^{2n-1-k}.$$

(b) Supposons donc$(1-X)^n A = X^n B$ avec $A, B \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Le membre de droite possède pour racine 0, avec une mutiplicité au moins égale à n. Il en va donc de même avec le membre de gauche. En évaluant en 0, on trouve $A(0) = 0$. En dérivant une fois avant d'évaluer en 0, on trouve $A'(0) = 0$, puis par récurrence avec prédécesseurs : pour tout $k < n$, $A^{(k)}(0) = 0$. A possède donc 0 pour racine de mutiplicité au moins n. Mais A est de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc $A = 0$, puis $B = 0$.
Pour ceux voulant éviter la récurrence avec prédécesseurs : on raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe $i \in [\![0, n-1]\!]$ *tel que* $A^{(i)}(0) \neq 0$. *On choisit* i_0 *contre-exemple minimal. On a alors* $i_0 > 0$ *puisque* $A(0) = 0$. *Par minimalité de* i_0 : $A(0) = A'(0) = \cdots = A^{(i_0-1)}(0) = 0$. *Mais* $((1-X)^n A)^{(i_0)}(0) = 0$, *donc d'après Leibniz :* $A^{(i_0)}(0) = 0$, *ce qui est absurde.*

(c) Supposons : $(1-X)^n F_n + X^n G_n = 1 = (1-X)^n C_n + X^n D_n$, avec $C_n, D_n, F_n, G_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a alors $(1-X)^n (F_n - C_n) = X^n (D_n - G_n)$, avec $F_n - C_n$ et $D_n - G_n$ de degrés inférieurs ou égaux à $n-1$, donc le résultat précédent s'applique et nous fournit $F_n - C_n = 0 = D_n - G_n$, donc $F_n = C_n$ et $D_n - G_n = 0$, fournissant l'unicité demandée.

(d) Hum... essayons :
```
F:=n->expand(add(binomial(2*n-1,k)*X**k*(1-X)**(n-1-k),k=0..n-1)):
```

(e) D'après ce qui précède, $F_1 = G_1 = 1$,

$$F_2 = (1-X) + 3X = 1 + 2X,$$

$$G_2 = 3(1-X) + X = 3 - 2X,$$

$$F_3 = (1-X)^2 + 5X(1-X) + 10X^2 = 1 + 3X + 6X^2,$$

et enfin :

$$G_3 = 10(1-X)^2 + 5X(1-X) + X^2 = 10 - 15X + 6X^2.$$

(f) Composons la relation (R) définissant G_n et G_n par le polynôme $1-X$ (bref, `subs(X=1-X,relation)` : on remplace X par $1-X$...). On obtient alors :

$$X^n F_n(1-X) + (1-X)^n G_n(1-X) = 1$$

Mais $F_n(1-X)$ et $G_n(1-X)$ sont des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc l'unicité prouvée dans la question 1b nous assure : $F_n(1-X) = G_n$ et $G_n(1-X) = F_n$.

(g) On obtient immédiatement en évaluant (R) en 0 : $F_n(0) = 1$. En évaluant en 1 la valeur de F_n établie en début de problème, on obtient une somme dont tous les temres sauf le premier sont nuls. Et ainsi : $F_n(1) = \binom{2n-1}{n-1}$. Enfin, en évaluant (R) en $\frac{1}{2}$, et puisque $G_n(1/2) = F_n(1/2)$: $\left(\frac{1}{2}\right)^n F_n(1/2) + \left(\frac{1}{2}\right)^n F_n(1/2) = 1$, donc : $F_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

2. (a) En dérivant (R), on obtient $-n(1-X)^{n-1}F_n + (1-X)^n F_n' + nX^{n-1}G_n + X^n G_{n-1}' = 0$, soit encore :

$$(1-X)^{n-1}\left(nF_n - (1-X)F_n'\right) = X^{n-1}\left(nG_n + XG_n'\right).$$

Le raisonnement de la question 1b nous assure que 0 est racine de multiplicité au moins $n-1$ pour le polynôme $nF_n - (1-X)F_n'$, qui est de degré au plus $n-1$, donc est nécessairement de la forme KX^{n-1} comme annoncé.

(b) i. Bien entendu, $a_0 = F_n(0) = 1$.

ii. Le coefficient constant dans le membre de gauche de l'équation différentielle (E) de la question précédente vaut $na_0 - b_0$, avec b_0 le coefficient constant dans $(1-X)F_n'$, c'est-à-dire a_1. Ainsi (puisque le coefficient constant est nul dans le membre de droite et qu'il y a unicité de la décomposition dans la base $(1, X, ..., X^{n-1})$) : $na_0 = a_1$, et donc : $a_1 = n$.

iii. Pour $k \in [\![0, n-2]\!]$, le coefficient de X^k dans (E) vaut d'une part 0 et d'autre part $na_k - (k+1)a_{k+1} + ka_k$, et donc : $a_{k+1} = \frac{n+k}{k+1}a_k$.

iv. D'après ce qui précède :

$$a_k = \frac{n+k-1}{k}a_{k-1} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)}{k(k-1)}a_{k-2} = \cdots = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots n}{k!}a_0 = \binom{n+k-1}{k}$$

Et le lecteur pointilleux pourra prouver cela par récurrence si les petits points le troublent.