843 - le 12 Décembre 2009 **DS 5 - 4 heures**

Calculatrices interdites

1 Du cours

1. Énoncer et prouver le théorème d'unicité de la limite pour les suites réelles convergentes.
2. On suppose que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 843$. Montrer : $u_n + v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
3. Montrer que toute suite réelle croissante possède une limite[1].
4. Énoncer et prouver le théorème de passage des inégalités à la limite (disons en 0^+, pour des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$).

2 As usual

1. Rappeler la définition de la fonction tanh, et calculer son développement limité à l'ordre 4 en 0. Donner également un équivalent simple de $\sinh x$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Montrer que $\dfrac{\mathrm{e}^{\sinh x} - \cos x - \ln(1+\tan x)}{(3^x - \mathrm{e}^x)\tanh x}$ admet une limite lorsque x tend vers 0.
3. Donner un équivalent simple, lorsque x tend vers 0, de $\left(\dfrac{1+2x+2x^2}{1+2x+3x^2}\right)^{1/4} - 1$.
4. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \sqrt{1+2x^2}\dfrac{\ln(\sinh x)}{x}\cdot$ Montrer que le graphe de φ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$, et déterminer les positions respectives (au voisinage de $+\infty$) du graphe et de l'asymptote.

3 Deux courbes paramétrées

1. *Folium de Descartes :* Étudier et représenter l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t}{1+t^3} \\ y(t) &= \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$

   Pour réduire le domaine d'étude on pourra s'intéresser à $M_{1/t}$, lorsque $t \neq 0$.
2. Étudier et représenter l'arc de paramétrisation polaire

$$\rho(\theta) = \cos\theta - \cos(2\theta).$$

   L'étude des variations de ρ est interdite. Par contre, il pourra être intéressant de factoriser l'expression polynômiale $-2x^2 + x + 1$...

[1]Et non, il n'y a pas d'erreur d'énoncé...

4 Une relation de récurrence d'ordre un

Etudier la suite u de premier terme $u_0 = 0$, et vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + \sin(u_n) + \frac{1}{2}\cdot$$

La convergence semble-t-elle être plutôt lente ou plutôt rapide ?

On devra impérativement :

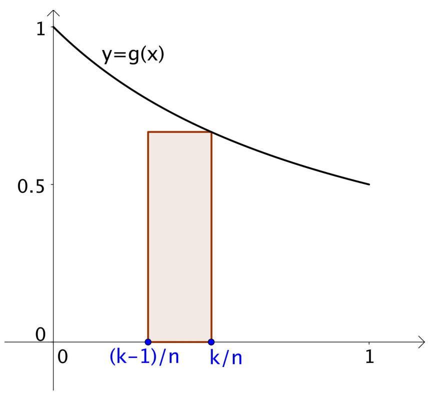
- *étudier* $f : x \mapsto x + \sin x + \frac{1}{2}$, *ce qui inclut le signe de* $f(x) - x$, *les variations de* f, *et son graphe ;*
- *représenter les premiers termes de la suite de la façon usuelle ;*
- *localiser la suite ;*
- *prouver la convergence ;*
- *localiser soigneusement la limite, puis la déterminer.*

5 Trois attaques pour une même somme

On s'intéresse dans cet exercice à la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ de terme général :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\cdot$$

1. À l'aide de la suite T définie pour $n \geq 1$ par $T_n = S_n + \frac{1}{4n}$, montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
2. À l'aide d'une comparaison somme/intégrale pour la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, prouver :
$$S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln 2.$$
3. On utilise maintenant la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}\cdot$
   (a) Que vaut l'aire du rectangle représenté sur le schéma suivant ?



   (b) À l'aide de nouvelles comparaisons sommes/intégrales, retrouver le résultat établi plus haut : $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln 2$.