

1 Du cours

Pour une fois, rédigeons les questions de cours :

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, avec $x \geq 0$ et $x^2 - y^2 = 1$. On a $x^2 = 1 + y^2 \geq 1$, donc $|x| \geq 1$ puis $x \geq 1$. Mais la fonction \cosh réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$ donc il existe (un unique) $t \geq 0$ tel que $x = \cosh t$. En fixant un tel t , on a alors :

$$y^2 = x^2 - 1 = \cosh^2 t - 1 = \sinh^2 t,$$

donc $y = \pm \sinh t$. Si $y = \sinh t$, c'est gagné ; sinon, on a $y = -\sinh t = \sinh(-t)$ et $x = \cosh(t) = \cosh(-t)$, et c'est encore gagné !

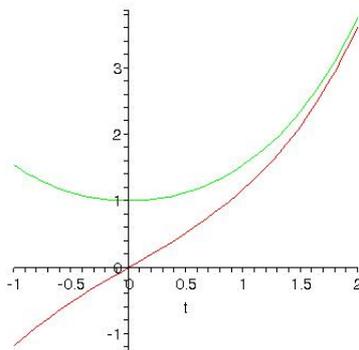


FIG. 1 – Les graphes des fonctions \sinh et \cosh

On aurait pu commencer par dire (la fonction \sinh réalisant une bijection de \mathbb{R} sur lui-même), qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $y = \sinh t$. On a alors $x^2 = 1 + y^2 = 1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t$, donc $x = \pm \cosh t$. Mais comme x et $\cosh t$ sont positifs...

2. (a) Version 1 : le calcul fait en cours.

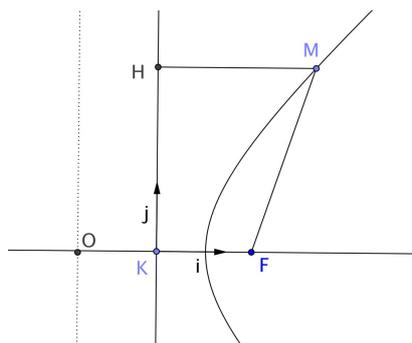


FIG. 2 – On travaille d'abord dans (K, i, j)

Dans le repère adéquat, en notant $d = KF$, on a $M(x, y) \in \mathcal{H}$ si et seulement si $MF^2 = e^2 MH^2$, c'est-à-dire $(x - d)^2 + y^2 = e^2 y^2$, soit encore avec les manipulations naturelles pour

regrouper les termes d'une même famille (et en prenant bien garde au fait que $e^2 > 1$) :

$$\frac{\left(x - \frac{d}{1-e^2}\right)^2}{\frac{e^2 d^2}{(e^2-1)^2}} - \frac{y^2}{\frac{e^2 d^2}{e^2-1}} = 1. \quad (1)$$

Ceci nous conduit bien à l'équation $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$, avec $a = \frac{ed}{e^2-1}$ et $b = \frac{ed}{\sqrt{e^2-1}}$, après avoir pris comme nouvelle origine le point O de coordonnées $\left(\frac{d}{1-e^2}, 0\right)$ dans l'ancien repère. Puisque le foyer avait pour coordonnées $(d, 0)$ dans l'ancien repère, la distance entre ledit foyer et le centre de symétrie O est

$$c = \left|d - \frac{d}{1-e^2}\right| = \left|\frac{de^2}{1-e^2}\right| = \frac{de^2}{e^2-1}.$$

Ensuite, piece of cake.

- (b) Version 2 : en utilisant la paramétrisation polaire. Avec la paramétrisation $\rho = \frac{p}{1-e\cos\theta}$, le centre de symétrie est au milieu des deux sommets, dont les distances au foyer sont données pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, donc :

$$c = \frac{1}{2} \left| \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} \right| = \dots = \frac{pe}{e^2-1}.$$

Si on sait que $e = \frac{c}{a}$, on a directement a . Sinon, a est la distance entre n'importe quel sommet et le centre de symétrie qu'on a trouvé précédemment, donc :

$$a = c - \frac{p}{1+e} = \dots = \frac{p}{e^2-1}.$$

Pour b , on peut noter que la pente des asymptote vaut $\pm \frac{b}{a}$ d'une part, mais correspond d'autre part à un angle dont le cosinus vaut $\pm \frac{1}{e}$, donc la pente vaut $\pm \sqrt{e^2-1}$, de sorte que $b = a\sqrt{e^2-1} = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}$, et la fin n'est plus trop compliquée.

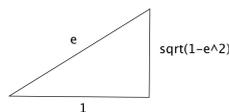


FIG. 3 – Du cosinus à la pente...

3. Une fonction f de E dans F est dite injective lorsque tout élément de F possède *au plus* un antécédent par f . Elle est dite surjective lorsque tout élément de F possède *au moins* un antécédent par f . Donnons quatre fonctions qui se ressemblent :

	injective	non-injective
surjective	$f_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ $x \mapsto x^2$	$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ $x \mapsto x^2$
non-surjective	$f_3 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x^2$	$f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x^2$

Version patatoïdique :

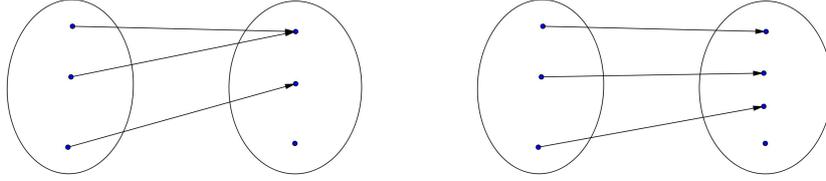


FIG. 4 – Une fonction non-injective/non-surjective, et une autre injective/non-surjective

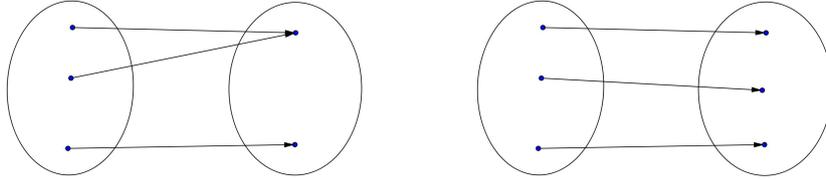


FIG. 5 – Complétons la famille...

2 Trois courbes paramétrées

- (a) On a clairement $M_{t+2\pi} = M_t$. Cela dit, $x(t + \pi) = -x(t)$ et $y(t + \pi) = -y(t)$, donc $M_{t+\pi}$ est l'image de M_t par la symétrie de centre O . Il suffit donc d'étudier la courbe sur tout intervalle de taille π , par exemple $[-\pi/2, \pi/2]$. Mais M_{-t} est l'image de M_t par la réflexion par rapport à l'axe (Oy) , donc il suffit de représenter les M_t pour t décrivant $[0, \pi/2]$, puis de faire une réflexion et une symétrie centrale (ou encore deux réflexions : la composée de la réflexion et de la symétrie étant la réflexion par rapport à l'axe (Ox)).

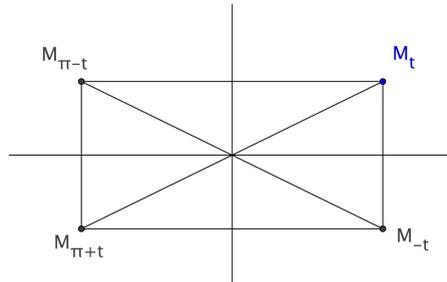


FIG. 6 – Réduction du domaine d'étude

Après de phénoménaux calculs, on obtient les expressions factorisées (bien sûr...) :

$$x'(t) = (\cos t) (3 \cos^2 t - 1) \quad \text{et} \quad y'(t) = (\sin t) (3 \cos^2 t - 1).$$

Sur $[0, \pi/2]$, ces expressions sont du signe de $3 \cos^2 t - 1$. Cette quantité est continue et décroît strictement de 4 à -1 ; elle s'annule donc (TVI) en exactement (stricte décroissance) un point, à savoir θ_0 , l'unique angle de $[0, \pi/2]$ dont le cos vaut $\frac{1}{\sqrt{3}}$, soit encore $\theta_0 = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. En ce

point, x' et y' s'annulent : on a un point stationnaire.

t	0	θ_0	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	2	+	0
$x(t)$	0	$\nearrow x(\theta_0)$	\searrow 1
$y(t)$	0	$\nearrow y(\theta_0)$	\searrow 0
$y'(t)$	0	+	0
		-	-1

- (b) On a : $\vec{V}_t = (3 \cos^2 t - 1) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, donc \vec{V}_t fait effectivement un angle de t modulo π (et pas 2π , le terme en facteur pouvant être négatif). Au voisinage de M_{θ_0} , par exemple, l'angle entre l'axe (Ox) et la tangente va passer par θ_0 en étant strictement croissant. Les variations de x et y imposent alors un point de rebroussement de première espèce en M_{θ_0} . Localement, on a donc l'aspect suivant :



FIG. 7 – Le point de rebroussement

- (c) Et globalement :

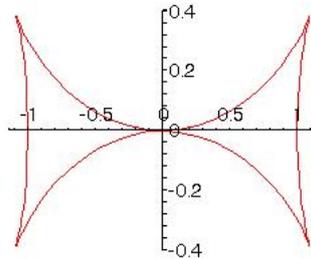


FIG. 8 – La courbe Γ_1

2. (a) ρ est ici défini sur $]0, +\infty[$, et il n'y a pas grand chose à étudier : le signe (et même les variations) de ρ sont clairs. Lorsque θ tend vers $+\infty$, M_θ va donc s'éloigner de l'origine (de plus en plus lentement). Lorsque θ tend vers 0, $\rho(\theta)$ tend vers $-\infty$, donc on peut avoir différents scénarios : $y \rightarrow 0$, $y \rightarrow -1515$, et même $y \rightarrow -\infty$... avec ou sans inflexions.

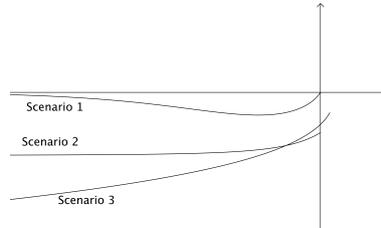


FIG. 9 – Trois scénarios

(b) On repasse en coordonnées cartésiennes : $x(\theta) = \rho(\theta) \cos(\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0^+} -\infty$, et :

$$y(\theta) = \rho(\theta) \sin(\theta) = \sin(\theta) \ln \theta \sim \theta \ln \theta \xrightarrow{\theta \rightarrow 0^+} 0^-.$$

L'axe (Ox) est donc asymptote à Γ_2 .

(c) L'asymptote semble imposer l'existence d'un point d'inflexion. On va chercher un éventuel changement de signe *en un point non stationnaire* du produit mixte de la vitesse et de l'accélération, que l'on calcule grâce à son expression dans le repère tournant, qui a le bon goût d'être orthonormé direct :

$$pm(\theta) = [V_\theta, a_\theta] = \begin{vmatrix} \rho' & \rho'' - \rho \\ \rho & 2\rho' \end{vmatrix} = \dots = \frac{2 + \ln \theta + \theta^2 \ln^2 \theta}{\theta^2} = \frac{N(\theta)}{\theta^2}.$$

$N(\theta)$ est clairement strictement positif pour $\theta \geq 1$. Par ailleurs, $N(\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0^+} -\infty$, donc la continuité de N sur $]0, 1]$ impose via le théorème des valeurs intermédiaires l'existence d'un θ_0 en lequel N s'annule. Si on admet l'unicité, cela impose le signe de N avant et après θ_0 , puis l'existence et l'unicité d'un point d'inflexion, en θ_0 , puisque ce point n'est pas stationnaire.

(d)

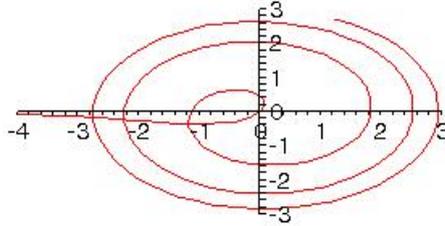


FIG. 10 – La courbe Γ_2

3. $\rho(\theta)$ est défini lorsque $\cos \theta \cos(2\theta) \neq 1$. L'égalité $\cos \theta \cos(2\theta) = 1$ impose (regarder les valeurs absolues!) : $\cos \theta = \pm 1$ et $\cos(2\theta) = \pm 1$. Si $\cos \theta = 1$, alors $\theta = 0 [2\pi]$, donc $2\theta = 0 [4\pi]$ donc $\cos \theta \cos 2\theta = 1$. Si $\cos \theta = -1$, alors $\theta = \pi [2\pi]$ (et réciproquement), donc $2\theta = 2\pi [4\pi]$ donc $\cos \theta \cos 2\theta = -1$. Finalement, les « valeurs interdites » pour θ sont les réels de la forme $\pi + 2k\pi$. *Je ne me fais que peu d'illusions sur la façon dont vous aurez traité cette question!*

On ramène ensuite de façon standard l'étude à $[0, \pi[$. Sur cet intervalle, ρ est positif, et tend vers $+\infty$ en π^- . On passe alors en coordonnées cartésiennes :

$$x(\pi - u) = \rho(\pi - u) \cos(\pi - u) \xrightarrow{u \rightarrow 0^+} -\infty$$

$$y(\pi - u) = \rho(\pi - u) \sin(\pi - u) = \frac{\sin^2 u}{1 - \cos u \cos 2u}.$$

Mais $1 - \cos u \cos 2u = 1 - (1 - u^2/2 + o(u^2)) (1 - 4u^2/2 + o(u^2)) \sim \frac{5}{2}u^2$, donc $y(\pi - u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} \frac{2}{5}$, et on a une asymptote horizontale.

Pour bien faire les choses (...), on peut déterminer les position relatives en affinant le DL précédent. Les parités des fonctions en eu imposent d'ajouter deux ordres, au numérateur comme au dénominateur, ce qui donne, après un calcul (vraiment fait, mais que je n'ai pas envie de typographier!) :

$$\begin{aligned} y(\pi - u) &= \frac{(u(1 - u^2/6 + o(u^2)))^2}{1 - (1 - u^2/2 + u^4/24 + o(u^4))(1 - 2u^2 + 2u^4/3 + o(u^4))} \\ &= \dots = \frac{2}{5} + \frac{7}{50}u^2 + o(u^2), \end{aligned}$$

donc le graphe est situé dessus son asymptote.

Notons pour terminer que le résultat précédent impose manifestement un point d'inflexion pour un certain $\theta_0 \in]0, \pi[$ (ainsi que pour $-\theta_0$).

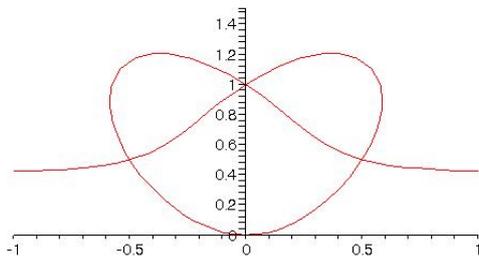


FIG. 11 – La courbe Γ_3

3 Une propriété essentielle des hyperboles

1. On calcule dans le repère auquel tout le monde pense : on va prendre M « à droite » : il existe alors $t \in \mathbb{R}$ tel que $M(a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t)$. L'équation normale de (T) est alors :

$$\frac{a \operatorname{ch} t}{a^2} x + \frac{b \operatorname{sh} t}{b^2} y = 1.$$

Les points P et P' (dont les abscisses sont connues!) ont alors pour coordonnées :

$$y_P = b \frac{\operatorname{ch} t - 1}{\operatorname{sh} t} \quad \text{et} \quad y_{P'} = -b \frac{\operatorname{ch} t + 1}{\operatorname{sh} t}.$$

On en déduit leur centre :

$$\Omega \left(0, -\frac{b}{\operatorname{sh} t} \right)$$

ainsi que le rayon du cercle de diamètre $[PP']$:

$$R^2 = a^2 + \left(b \frac{\operatorname{ch} t - 1}{\operatorname{sh} t} + \frac{b}{\operatorname{sh} t} \right)^2 = a^2 + b^2 \frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh}^2 t}.$$

Par ailleurs, $OF^2 = a^2 + b^2$ (question de cours...), donc :

$$\Omega F^2 = \Omega O^2 + OF^2 = \frac{b^2}{\operatorname{sh}^2 t} + a^2 + b^2 = a^2 + \frac{b^2}{\operatorname{sh}^2 t} (1 + \operatorname{sh}^2 t) = a^2 + b^2 \frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh}^2 t}$$

(personne n'a oublié : $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$...) donc F est situé sur le cercle de diamètre $[PP']$, et par symétrie, le second foyer l'est également.

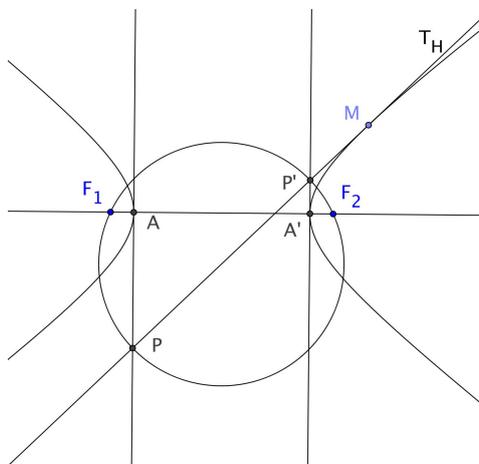


FIG. 12 – Le cercle passe bien par les foyers

2. Réciproquement, prenons \mathcal{C} un cercle passant par les deux foyers. Son centre est sur la médiatrice de $[F_1F_2]$, donc a pour coordonnées $C(0, \beta)$. Si $\beta \neq 0$, alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\beta = -\frac{b}{\text{sh } t_0}$, et en partant du point $M(a \text{ch } t_0, b \text{sh } t_0)$, les calculs précédents nous assurent que $[PP']$ sera un diamètre de \mathcal{C} .

Enfin, si $\beta = 0$ (cas où $[F_1F_2]$ est un diamètre de \mathcal{C}), il n'existera pas de point M produisant P et P' tels que $[PP']$ soit un diamètre de \mathcal{C} , car il n'existe pas de $t \in \mathbb{R}$ tel que $-\frac{b}{\text{sh } t} = 0$.

4 Une « série alternée »

1. (a) Tout simplement : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\alpha_{n+1} = u_{2n+2} = u_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \alpha_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > \alpha_n,$$

donc $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est croissante. On établit de la même façon la décroissance de $(\beta_n)_{n \geq 1}$. Enfin, $\beta_n = \alpha_n + \frac{1}{2n+1}$, donc effectivement : $\alpha_n \leq \beta_n$.

(b) **BIEN ENTENDU**, la majoration $\alpha_n \leq \beta_n$ ne dit pas que $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est majorée. Par contre, la décroissance de $(\beta_n)_{n \geq 1}$ nous assure que l'on a $\beta_n \leq \beta_1$, de sorte que : $\alpha_n \leq \beta_n \leq \beta_1$, et $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est effectivement croissante et majorée donc converge. Même chose pour $(\beta_n)_{n \geq 1}$ (décroissante, minorée par α_1). Notons maintenant l_1 (resp. l_2) la limite de $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ (resp. $(\beta_n)_{n \geq 1}$). La relation $\beta_n = \alpha_n + \frac{1}{2n+1}$ nous assure : $l_2 = l_1$ (les deux membres de la relation précédente convergent, et il y a unicité de la limite).

(c) Ce sera un résultat de cours : « si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors (u_n) converge vers cette même limite. »

Si ce résultat vous paraît clair (et il me semble que ce devrait être le cas!), attendez quelques jours pour voir la preuve. Si ce n'est pas le cas, la preuve ne vous le fera pas comprendre!

2. (a) En suivant les définitions :

$$\begin{aligned} u_6 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) \\ &= v_6 - 2 \times \frac{v_3}{2} = v_6 - v_3. \end{aligned}$$

Bien entendu, sur le même principe :

$$\forall n \geq 1, \quad u_{2n} = v_{2n} - v_n.$$

(b) Il s'agit d'encadrer v_n . Pour cela, on va encadrer chaque terme de la somme, à savoir $\frac{1}{k}$.

Notons pour cela $f : t > 0 \mapsto \frac{1}{t}$.

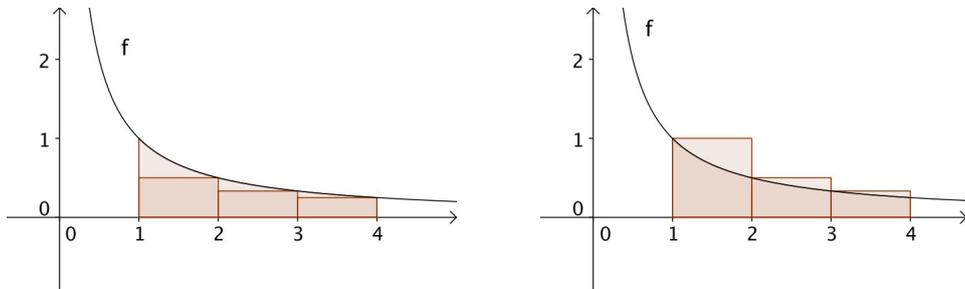


FIG. 13 – L'encadrement $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \leq \int_1^4 \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

Attention, pour $k = 1$ on peut minorer, mais pas majorer $\frac{1}{k}$ par une intégrale.

Fixons donc $k \geq 2$. La fonction f est décroissante sur $I = [k-1, k]$, donc $f(t) \geq f(k)$ pour tout $t \in I$, donc en intégrant cette inégalité, on obtient $\int_{k-1}^k f \geq f(k)$. Le même travail sur

$[k, k+1]$ fournit $\int_k^{k+1} f \leq f(k)$, et ainsi :

$$\forall k \geq 2, \quad \int_k^{k+1} f \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f \geq f(k).$$

En sommant ces inégalités pour k variant de 2 à $n \geq 2$ fixé puis en ajoutant 1, on obtient :

$$1 + \int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leq v_n \leq \int_1^n \frac{dt}{t},$$

soit encore :

$$1 + \ln(n+1) \leq v_n \leq 1 + \ln n.$$

Il rest à voir que les membres extérieurs sont équivalents à $\ln n$. On divise alors chacun des trois termes par $\ln n$: les membres extérieurs tendent vers 1, donc le théorème des gendarmes nous assure qu'il en va de même pour le terme central, ce qui établit exactement ce qu'on voulait, à savoir :

$$v_n \sim \ln n.$$

- (c) Alors, combien auront fait une différence d'équivalents ??? Bon, plus sérieusement, le développement $v_n = \ln n + o(\ln n)$ nous dit seulement : $v_{2n} - v_n = \ln 2 + o(\ln n)$, ce qui ne permet pas de prouver la convergence de $v_{2n} - v_n$.

Cela dit, $v_{2n} - v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$, donc si on a bien compris la première comparaison somme/intégrale, on obtient quasiment immédiatement :

$$\forall n \geq 1, \quad \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{t} \leq v_{2n} - v_n \leq \int_n^{2n} \frac{dt}{t} = \ln 2.$$

Mais le membre de gauche vaut

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) = \ln \left(\frac{2n(1 + 1/(2n))}{n(1 + 1/n)} \right) = \ln 2 + \ln(1 + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln 2,$$

donc le théorème des gendarmes nous assure :

$$v_{2n} - v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln 2.$$

- (d) Hum, si on a bien suivi :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln 2.$$