1 Du cours

No comment

2 Surprise !

1. `add(i**2,i=1..100),sum(n**2-k,k=0..n);`
2. `sum(sum(i+k,i=0..k),k=0..n);`
3. `dsolve(t*D(D(y))(t)+3*y(t)=t**2+5);`
4. `f:=x->x**(x**2*sin(x)):D(D(f))(Pi/2);`

3 Quelques calculs

Pas de commentaires particuliers pour les équations différentielles : voir le corrigé du DM pour la façon de rédiger... mais ça ne pose en général pas de problème, donc on donne seulement les résultats. Pour le calcul d'asymptote, les explications et détails des calculs sont donnés.

1. Il y a une seule solution, à savoir l'application :
$$y : t \longmapsto \frac{1}{(t+1)^2}\left(\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+843\right).$$
2. Une seule solution à nouveau :
$$y : t \longmapsto \left(\frac{t}{9}-\frac{4}{81}\right)\mathrm{e}^{4t}-\frac{1}{162}\mathrm{e}^{-5t}+\frac{1}{18}\mathrm{e}^{t}$$
3. Les trois termes en jeu sont respectivement équivalents à x^2, 1 et x. L'application f en jeu vérifie donc au voisinage de $+\infty$: $f(x) \sim x$. Pour avoir un développement asymptotique de la forme $ax+b+\frac{c}{x}+o(1/x)$ (en fait, a ne peut valoir que 1...), on va donc calculer des développements limités de chaque terme du produit, avec deux termes au delà de l'équivalent. Ce qui donne, par ordre croissant de difficulté, et en notant qu'il n'y aura **aucun** quotient de développement limité à réaliser, si on maîtrise bien l'arithmétique des puissances de la classe de seconde :
$$\mathrm{e}^{-1/x} = 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
puis :
$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{2x}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\right)\frac{1}{x^2}+o(1/x^2)\right)$$
et enfin :
$$\sqrt[3]{x^6+x^5+x^4+1} = x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o(1/x^2)\right)^{1/3} = x^2\left(1+\frac{1}{3x}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)\frac{1}{x^2}+o(1/x^2)\right)$$
(on a utilisé deux fois le DL $(1+u)^\alpha = 1+\alpha u+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2+o(u^2)$.)

Il reste à multiplier ces trois développements limités (attention : veiller à ne distribuer les termes principaux qu'à la fin) :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2\left(1+\frac{1}{3x}+\frac{2}{9x^2}+o(1/x^2)\right)\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+o(1/x^2)\right)\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= x\left(1+\underbrace{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}_{-1/6}\frac{1}{x}+\underbrace{\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{6}+\frac{2}{9}\right)}_{-5/72}\frac{1}{x^2}+o(1/x^2)\right)\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= x\left(1+\underbrace{\left(-1-\frac{1}{6}\right)}_{-7/6}\frac{1}{x}+\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{5}{72}\right)}_{43/72}\frac{1}{x^2}+o(1/x^2)\right)\\
&= x-\frac{7}{6}+\frac{43}{72x}+o(1/x)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\delta(x)=f(x)-\left(x-\dfrac{7}{6}\right)\sim\dfrac{43}{72x}$, donc $\delta(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0+$, donc le graphe de f possède au voisinage de $+\infty$ une asymptote, à savoir la droite Δ d'équation $y=x-\dfrac{7}{6}$. De plus, le graphe de f est situé dessus l'asymptote.

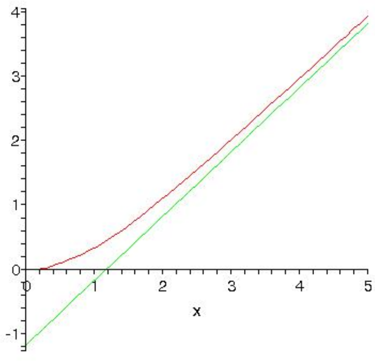

FIG. 1 – Graphe de f et de son asymptote

4 Un développement asymptotique

1. La fonction f tend vers 0 en $-\infty$ (puissances comparées) et $+\infty$ en $+\infty$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f'(x)=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x=x(2+x)\mathrm{e}^x.$$

Le signe de f' et ses variations s'en déduisent aisément. On reporte les informations sur un tableau de variations, ce qui ne dispensera pas de préciser les théorèmes utilisés pour justifier ceci ou cela ultérieurement :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0^+	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe de f s'en déduit :

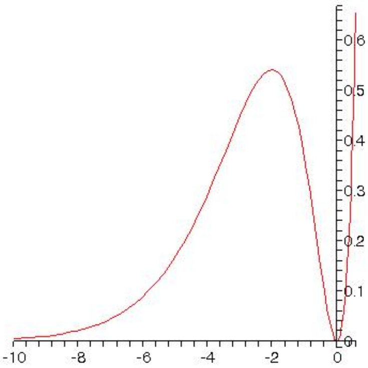

FIG. 2 – Graphe de f

Prenons maintenant n un entier supérieur ou égal à 2. f est strictement croissante sur $]-\infty,-2]$ (car continue, de dérivée strictement positive sur $]-\infty,-2[$), continue, tendant vers 0^+ en $-\infty$, donc réalise une bijection de $]-\infty,-2]$ sur $]0,f(-2)]$. Comme $f(-2)=\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}>\dfrac{1}{2}\geq\dfrac{1}{n}$, il existe un unique $x\in]-\infty,-2[$ tel que $f(x)=\dfrac{1}{n}\cdot$ Les mêmes arguments assurent que f induit une bijection de $[-2,0]$ (resp. $[0,+\infty[$) sur $[0,f(2)]$ (resp. $\mathbb{R}^+$), d'où l'existence de deux autres réels distincts (appartenant à respectivement $]-2,0[$ et $]0,+\infty[$) d'image $\dfrac{1}{n}$ par f.

2. On a $f(-\sqrt{n})=n\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$. Mais $nf(-\sqrt{n})\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ (en vertu du théorème des puissances comparées[1]), donc $nf(-\sqrt{n})<\dfrac{1}{2}$ pour n assez grand, donc $f(-\sqrt{n})<\dfrac{1}{n}=f(x_n)$, donc $-\sqrt{n}<x_n$ par croissance de f sur $]-\infty,-2]$ (les deux protagonistes sont bien dans cet intervalle dès que $n\geq 4$). On a alors : $-\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\dfrac{x_n}{n}<0$, donc $\dfrac{x_n}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, donc $x_n=o(n)$.

3. Dans la relation $x_n^2\mathrm{e}^{x_n}=\dfrac{1}{n}$, laissons à gauche le plus gros terme, et prenons le logarithme. On obtient :
$$x_n=-\ln\left(nx_n^2\right)=-\ln n-2\ln|x_n|\,.$$
Mais $x_n=o(n)$, donc $\ln|x_n|=o(\ln n)$... donc ...

Hahaha !

Ben non : $u_n=o(v_n)$ n'entraine pas $\ln(u_n)=o(\ln v_n)$ (penser à $\sqrt{n}=o(n)$... Mais oui, j'ai fait l'erreur en concevant l'énoncé... mais non, ça ne vous excusera pas :-)). Le minorant $-\sqrt{n}<x_n$ est donc insuffisant, de même que tout minorant du type $-n^\alpha<x_n$. Essayons de prouver $-2\ln n<x_n$. Pour cela, notons que $f(-2\ln n)=4\dfrac{\ln^2 n}{n^2}=o(1/n)$, donc $f(-2\ln n)<\dfrac{1}{n}$ pour n assez grand (le quotient tend vers 0 donc est strictement plus petit que 1 pour n assez grand). Ainsi, on a bien $-2\ln n<x_n$ APCR. On aura alors $0<\ln|x_n|<\ln 2+\ln(\ln n)=o(\ln n)$ (pourquoi au fait ?), et la relation vue plus haut $x_n=-\ln n-2\ln|x_n|$ nous assure :
$$x_n\sim-\ln n.$$

4. On injecte $x_n=(-\ln n)(1+\alpha_n)$ dans la relation $x_n=-\ln n-2\ln|x_n|$ pour trouver :
$$-\ln n-\alpha_n\ln n=-\ln n-2\ln(\ln n)-2\ln(1+\alpha_n),$$

[1] terme que j'adopte désormais

donc $-\alpha_n \ln n = -2\ln(\ln n) + o(1) \sim -2\ln(\ln n)$, et ainsi :

$$\alpha_n \sim \frac{2\ln(\ln n)}{\ln n}.$$

5. D'après ce qui précède, on a $x_n = -\ln n - 2\ln(\ln n) + o(\ln(\ln n))$, donc $x_n - (-\ln n)$ est équivalent à $-2\ln(\ln n)$, qui tend très lentement... mais surement vers $-\infty$.

6. Rejouons en injectant $x_n = -\ln n \left(1 + \frac{2\ln(\ln n)}{\ln n}(1+\varepsilon_n)\right)$ dans notre relation préférée, pour trouver :

$$-\ln n - 2\ln(\ln n) - 2\varepsilon_n \ln(\ln n) = -\ln n - 2\ln(\ln n) - 2\ln\left(1 + \frac{2\ln(\ln n)}{\ln n}(1+\varepsilon_n)\right),$$

donc après simplifications, on obtient

$$\varepsilon_n \ln(\ln n) = \ln\left(1 + \frac{2\ln(\ln n)}{\ln n}(1+\varepsilon_n)\right) \sim \frac{2\ln(\ln n)}{\ln n}(1+\varepsilon_n) \sim \frac{2\ln(\ln n)}{\ln n},$$

donc $\varepsilon_n \sim \frac{2}{\ln n}$, et finalement :

$$x_n = -\ln n - 2\ln(\ln n) + 4\frac{\ln(\ln n)}{\ln n} + o\left(\frac{\ln(\ln n)}{\ln n}\right).$$

5 Morphismes taupinaux

1. La *bijectivité* de la fonction ln entre $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$ nous assure que la relation $e^{ab} = e^a e^b$ est équivalente à $ab = a + b$ (« on prend le log », ça ne veut rien dire. Enfin, ça peut vouloir dire : « si $x = y$, alors $\ln x = \ln y$ », ce qui est vrai mais insuffisant ici puisqu'on veut des équivalences pour *résoudre* l'équation, et pas seulement *trouver des conditions nécessaires*).
Je ne me fais pas la moindre illusion sur la façon dont aura été maltraitée cette simple équation $ab = a + b$, pourtant équivalent à $b(a-1) = a$. Pour $a = 1$, il n'y a pas de b qui convienne, et pour $a \neq 1$, il existe exactement un b, à savoir $\frac{a}{a-1}$. L'ensemble recherché est donc :

$$E_1 = \left\{ \left(a, \frac{a}{a-1}\right) \;\middle|\; a \in \mathbb{R}^* \right\}$$

Sa représentation est le graphe de l'application $a \neq 0 \longmapsto \frac{a}{a-1}$, à savoir :

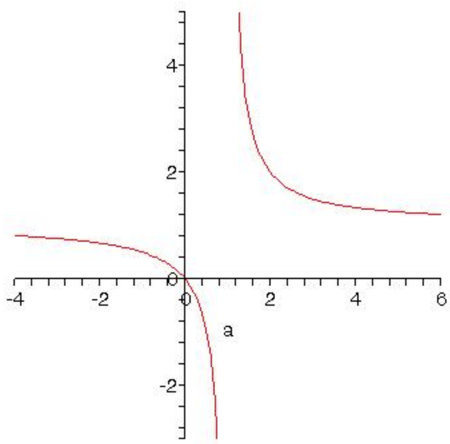

FIG. 3 – Ensemble E_1

2. Hum... Si on ne nous a pas raconté d'histoires, l'ensemble recherché est $E_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pour le représenter, il faut sortir un crayon et colorier sa copie (complètement).
3. En factorisant e^b, on obtient :

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^b\left(\mathrm{e}^a - 1\right) = \mathrm{e}^a.$$

Si $\mathrm{e}^a \leq 1$ (c'est-à-dire $a \leq 0$, cette équation n'est jamais vérifiée (le membre de droite est strictement positif, alors que celui de gauche est négatif). Et pour $a > 0$, on a :

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^b = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^a - 1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = a - \ln(\mathrm{e}^a - 1).$$

L'ensemble E_3 recherché est donc le graphe de l'application $h : a > 0 \mapsto a + \ln(\mathrm{e}^a - 1)$, qu'on étudie rapidement : h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée

$$h'(a) = 1 - \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^a - 1} = -\frac{1}{\mathrm{e}^a - 1} < 0,$$

donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et les limites (évidentes) en 0^+ et $+\infty$ nous donnent l'allure du graphe E_3 de h.

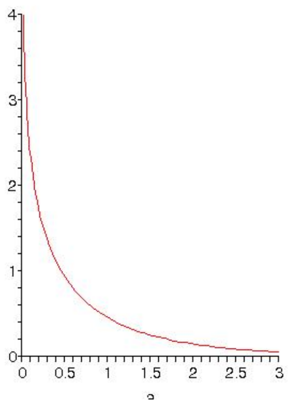

FIG. 4 – Ensemble E_3

4. (a) On a sans trop de mal :

$$\mathrm{e}^{0.b} = \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^b \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 = 1 + \mathrm{e}^b,$$

équation qui n'a pas beaucoup de solutions.
De même :

$$\mathrm{e}^{1.b} = \mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^b = \mathrm{e} + \mathrm{e}^b,$$

et on trouve à nouveau assez peu de solutions.

(b) Pas de problème !

$$\varphi_a'(b) = a\mathrm{e}^{ab} - \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^b\left(a\mathrm{e}^{b(a-1)} - 1\right).$$

(c) Lorsque a est strictement négatif, $\varphi_a'(b)$ est la différence d'un terme strictement négatif et d'un terme strictement positif... donc est strictement négatif ! φ_a est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Sa continuité et ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ (qui ne posent pas de problème, si on regarde chaque terme) nous assurent que φ_a réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même, donc il existe un unique $b \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi_a(b) = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^{ab} = \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b$.

(d) Supposons donc ici : $a > 1$. La fonction $\psi : b \mapsto a\mathrm{e}^{b(a-1)} - 1$ est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Avec les arguments usuels[2], elle s'annule en un unique point b_0 (qu'on peut même calculer,

[2] continuité, stricte croissance, limites en $-\infty$ et $+\infty$, égales respectivement à -1 et ∞

mais on s'en fiche). Par stricte croissance, ψ est alors strictement négative sur $]-\infty, b_0[$ et strictement positive sur $]b_0, +\infty[$.
Le signe de $\varphi'_a(b)$ est celui de $\psi(b)$, ce qui nous donne les variations de φ_a sur $\mathbb{R}$:

b	$-\infty$		b_0		$+\infty$
$\varphi'_a(b)$		$-$	0	$+$	
$\varphi_a(b)$	$-\mathrm{e}^a$	$\searrow$	$\varphi(b_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour $a = 2$, on obtient :

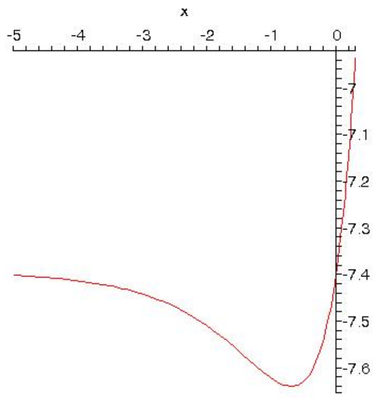

FIG. 5 – Graphe de φ_2

Sur $]-\infty, b_0]$, φ_a est strictement décroissante, donc prend des valeurs inférieures à sa limite en $-\infty$, à savoir $-\mathrm{e}^a$, donc $\varphi_a(b) < 0$.
Les arguments (très !) usuels nous assurent que φ_a réalise une bijection de $[b_0, +\infty[$ sur $[\varphi_a(b_0), +\infty[$. Comme 0 appartient à ce dernier intervalle, il existe un unique $b \in [b_0, +\infty[$ tel que $\varphi_a(b) = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^{ab} = \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b$.

(e) On suppose enfin $0 < a < 1$. On a sans problème (?) :

$$\varphi'_a(b) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = \frac{\ln a}{1-a},$$

mais aussi par stricte croissance de la fonction exponentielle :

$$\varphi'_a(b) > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad b(a-1) > -\ln a \qquad \Longleftrightarrow \qquad b < \frac{\ln a}{1-a}$$

(on a changé le signe des inégalités, puisque $a - 1 < 0$). De même :

$$\varphi'_a(b) > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad b(a-1) < -\ln a \qquad \Longleftrightarrow \qquad b > \frac{\ln a}{1-a}$$

Notons $x_a = \dfrac{\ln a}{1-a}$. φ_a est croissante sur $]-\infty, x_a]$, donc y prend des valeurs majorée par $\varphi_a(x_a)$. La décroissance sur $[x_a, +\infty[$ nous assure la même chose. φ_a possède donc sur $\mathbb{R}$ un maximum pris en x_a. Notant $g(a) = \varphi_a(x_a)$ et si on admet que g est strictement décroissante sur $]0, 1[$ (clair avec Maple, mais...), on en déduit que pour tout $b \in \mathbb{R}$, $\varphi_a(b) \leq \varphi_a(x_a) = g(a)$.
Mais :

$$g(a) = \varphi_a(x_a) = a^{\frac{a}{a-1}} - \mathrm{e}^a - a^{\frac{1}{1-a}} \underset{a \to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

(limite à établir soigneusement : il faut travailler sur deux des termes...) donc g prend sur $]0, 1[$ des valeurs strictement négatives, et ainsi :

$$\forall a \in]0, 1[, \ \forall b \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^{ab} < \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b.$$