843 - le 19 Septembre 2009 **DS 1 - 4 heures**

Calculatrices interdites

Rappels :

- $\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + o(u^8)$.
- $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^5}{5!} + o(u^5)$.
- $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$.
- $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + o(u^2)$.

1 Du cours

1. Montrer que si $u_n \sim v_n$, alors $\alpha_n u_n \sim \alpha_n v_n$.
2. Montrer que si $u_n \sim v_n$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
3. Donner deux fonctions f et g telles que $f(x) \sim g(x)$ mais $\ln(f(x))$ et $\ln(g(x))$ ne sont pas équivalents lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que si $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$ et $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x$, alors $f(x) + g(x) \underset{x\to 0}{\sim} 5x$.
5. Trouver quatres suites u, v, w, z telles que $u_n \sim v_n$, $w_n \sim z_n$, mais $u_n + w_n \not\sim v_n + z_n$.
6. Pour être divisible par 4 est-il nécessaire d'être divisible par 2 ? Est-ce suffisant ? Dans les deux cas, on donnera une preuve ou un contre-exemple.
7. Pour être divisible par 6 est-il nécessaire d'être divisible par 9 ? Est-ce suffisant ? Dans les deux cas, on donnera une preuve ou un contre-exemple.

2 Quelques calculs standards

1. Donner la limite éventuelle de $\left(1 + \frac{2}{n\ln^2 n}\right)^{n\ln n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Donner un équivalent simple (et la limite éventuelle) de $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\sin x}$ lorsque x tend vers 0.
3. Donner la limite éventuelle de $\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{\ln(1+x)}{x^2}}$ lorsque x tend vers 0.
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$\forall x \neq 0, \qquad f(x) = e^{-1/x}\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x + 1}.$$
Montrer que le graphe de f possède une asymptote au voisinage de $+\infty$. Préciser les positions relatives du graphe de f et de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.
5. Même chose avec la fonction $g : x \mapsto \ln(e^x + 2x^4 + 3)$.

3 Diverses choses

1. Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} x - 3y + 4z - 3t = 2 \\ 2x - 8y + 2z = 1 \\ 4x - 14y + 10z - 6t = 5 \\ -x + 7y + 8z - 9t = 4 \end{cases}$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Résoudre l'équation (d'inconnue $z \in \mathbb{C}$) : $az = b$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer sous forme factorisée : $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+8} \cos(kx)$.
4. Montrer par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} \leq \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

4 Equivalent de Stirling

Dans tout le problème, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt$.

4.1 Calcul et équivalent des intégrales de Wallis

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer : $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
On partira de I_{n+2} dans laquelle on fera intervenir un cos*, puis on intégrera soigneusement par parties (attention : si c'est trop rapide, je ne vais pas comprendre, donc ce sera déclaré faux...).*
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_{2k} = \dfrac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \dfrac{\pi}{2}$.
4. Trouver de même une formule simple exprimant I_7 puis I_{2k+1} à l'aide de factorielles.
On ne donnera pas de preuve, mais on montrera la provenance de cette formule « avec des petits points ».
5. Montrer que $(n+1)I_n I_{n+1}$ est indépendant de $n \in \mathbb{N}$, puis : $n I_n I_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$.
6. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (*revenir à sa définition...*).
7. Montrer : $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.
8. En déduire : $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

4.2 Equivalent de Stirling

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = \ln\Big(\dfrac{n!}{\sqrt{n}(n/\mathrm{e})^n}\Big)$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Simplifier l'expression de v_n, puis montrer : $v_n \sim \dfrac{-1}{12n^2}$.
2. Montrer qu'il existe un entier $n_0 \geq 2$ tel que pour $n \geq n_0$, on a $-\dfrac{1}{6n^2} \leq v_n \leq 0$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante, avec pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq w_n$, où $w_n = u_{n_0} - \dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n-1} \dfrac{1}{n^2}$.
4. Montrer que pour $n \geq n_0 + 1$, $w_n \geq u_{n_0} + \dfrac{1}{6(n-1)} - \dfrac{1}{6(n_0-1)}$.
On pourra comparer la somme intervenant dans w_n à une intégrale, ou bien noter que si $k > 1$, on a $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)} = \cdots - \cdots$
5. Montrer que (u_n) est convergente, et en déduire l'existence de $K \neq 0$ tel que $\dfrac{n!}{\sqrt{n}(n/\mathrm{e})^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} K$.
6. En utilisant la partie 1, montrer : $K = \sqrt{2\pi}$.
Ainsi, on obtient l'équivalent de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.