Polynômes

À rendre le Mercredi 3 Février 2010

1 Deux factorisations

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k$.

1. Déterminer les racines complexes de P_n, ainsi que leurs multiplicités.
2. Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Factoriser P_{2n} dans $\mathbb{R}[X]$.

2 Polynôme de Jourdan

1. Etudier rapidement les fonctions ch et sh ; représenter leurs graphes.
2. Vérifier : $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$, et établir une formule de même nature pour $\operatorname{sh}(a+b)$.
3. Si $t \in \mathbb{R}$, que dire de $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t$?
4. Exprimer $\operatorname{ch}(2t)$ à l'aide de $\operatorname{ch} t$. Même chose pour $\operatorname{ch}(3t)$.
5. Montrer soigneusement que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe $J_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(nt) = J_n(\operatorname{ch} t)$.
   Pour $n \geq 1$, on pourra faire intervenir $\operatorname{ch}((n+1)t)$ et $\operatorname{ch}((n-1)t)$.
6. On suppose dans cette question que J_n et R_n sont deux polynômes répondant à la question précédénte. Montrer : $J_n = R_n$.
   J_n est le n-ième polynôme de Jourdan
7. Dire ce que vaut J_n pour $n \in [\![0, 4]\!]$.
8. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos(n\theta) = J_n(\cos\theta)$.
   Finalement, ce Jourdan était un frimeur : J_n est en fait le n-ième polynôme de Tchebitchev.
9. Que vaut le degré de J_n ? Et son coefficient dominant ? Et son coefficient constant ?
10. Montrer soigneusement :
    $$(X^2 - 1)J_n'' + XJ_n' - n^2 J_n = 0.$$
    On pourra dériver deux fois la relation $\operatorname{ch}(nt) = J_n(\operatorname{ch} t)$.
11. Que dire[1] de $\operatorname{sh}(nt)$?

[1] Oui je sais, c'est un peu flou !