DM festif

À rendre le mercredi 6 Janvier 2010

1 Gardons la forme

1. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{1}{x\cos x}$ ainsi que sa dérivée possèdent des limites en 0^+.
2. Donner un équivalent simple de $\exp(\sqrt[3]{1+n^3}) - \exp(\sqrt[2]{1+n^2})$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Montrer que le graphe de l'application $f : x \mapsto x\dfrac{\sqrt[4]{x^4+2x^3+x^2+1}}{x-1}\cos\dfrac{3}{x+1}$ possède une asymptote, et déterminer les positions relatives de celle-ci et celui-là.

2 Première évaluation d'une vitesse de convergence

Soit u une suite vérifiant $u_{n+1} = 1 + u_n - \sqrt{|u_n|}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On suppose : $u_0 \in]-1,1[$. Montrer : $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.
2. Reprendre l'étude lorsque $u_0 = 2$.
3. On suppose maintenant : $u_0 = -2$. Étudier u.
   Dans la suite, on suppose $u_0 \in]-1,1[$, et on se propose de donner une évaluation asymptotique de $v_n = u_n - 1$.
4. Montrer : $v_{n+1} \sim \dfrac{1}{2}v_n$. *On pourra noter que dans le rapport $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, 1 vaut aussi $f(1)$, et se souvenir de ce fameux DS de terminale où on avait été l'un des seuls à voir cela !*
5. En déduire : $v_n = o\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$.
6. Justifier le fait que pour $\rho > \dfrac{1}{2}$, on a $v_n = o(\rho^n)$ alors que pour $\rho < \dfrac{1}{2}$, on a au contraire $\rho^n = o(v_n)$.

3 Un gros problème

Etant donnée une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs (ou nuls), on définit par récurrence la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$b_0 = \sqrt{a_0} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} + b_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Dans les trois premières parties, on étudie des exemples particuliers. La quatrième partie traite le cas où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et dans la dernière, on établit l'équivalence entre la convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et celle de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les cinq parties sont largement indépendantes.

3.1 Cas où a est constante

On suppose dans cette partie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = 1.$$

On pose $f : \begin{cases} [-1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{1+x} \end{cases}$ de sorte que $b_{n+1} = f(b_n)$.

1. Soit $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot$ Déterminer une équation du second degré à coefficients entiers vérifiée par α.

2. Calculer $f(\alpha)$ et $f'(\alpha)$ en fonction de α.
3. Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par α.
4. Montrer que $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

   On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = b_n - \alpha$.
5. Etablir que $\varepsilon_{n+1} \sim f'(\alpha)\varepsilon_n$.
6. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$ alors $|\varepsilon_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2,843}\,|\varepsilon_n|$.
7. En déduire que $b_n = \alpha + o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

3.2 Cas où a est à moitié constante !

On suppose dans cette partie que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{2n} = 0 \text{ et } a_{2n+1} = 1.$$

1. Etablir une relation de récurrence vérifiée par la suite $(b_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(b_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 2.
3. Montrer que $(b_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel l.

   À l'aide de la calculatrice, donner une estimation de l. Expliquer comment vous avez fait (on ne demande pas une preuve). Prouver ensuite soigneusement que $l \neq \alpha$ (celui de la partie précédente).
4. Prouver que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

3.3 Cas où $a_n = n^\gamma$

On suppose dans le début de cette partie que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = n.$$

1. Au vu de la feuille d'accompagnement Maple, que peut-on « prédire » sur le comportement de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Justifier !
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt{n} \leq b_n \leq n$. Que peut-on en déduire quant à la convergence éventuelle de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Pour $n \geq 1$, exprimer $\dfrac{b_n}{\sqrt{n}}$ en fonction de n et b_{n-1}, et en déduire que la prédiction vue plus haut n'était pas un mirage.
4. Prédire (au vu de la feuille Maple) le comportement de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $a_n = n^\gamma$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $\gamma \in \mathbb{R}_*^+$ fixé.

   Prouver le résultat, en commençant par montrer l'inégalité $\dfrac{b_n}{n^{\gamma/2}} \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3.4 Cas où a est croissante

On suppose dans cette partie que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On souhaite montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1. Montrer que si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également.

   On suppose maintenant que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer qu'il existe un unique $\beta > 0$ tel que $\beta = \sqrt{a+\beta}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq \beta$.
5. En déduire que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel b et exprimer b en fonction de a.

3.5 Cas général

On revient au cas général.

1. Montrer que si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Soit $l \in \mathbb{R}^+$. Montrer que si $a_n = l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l' que l'on exprimera simplement en fonction de l (on note $l' = \varphi(l)$ pour la suite). *On pourra s'inspirer de la partie 1*

   Dans toute la suite, on suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $l \geq 0$ (sans être nécessairement constante) et on fixe $\varepsilon_1 > 0$: grâce à la définition de la convergence, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $a_n \leq l + \varepsilon_1$. On considère alors la suite $(a'_n)_{n\geq 0}$ définie par $a'_n = \begin{cases} a_n & \text{si } n < N \\ l+\varepsilon_1 & \text{sinon} \end{cases}$ et $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite associée à $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la même façon que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est à $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq b'_n$.
4. Montrer que $b'_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(l+\varepsilon_1)$.
5. Montrer soigneusement que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (traiter à part le cas $l = 0$).