1 Une courbe à tracer

Commençons par le domaine de définition de ρ. $1+\sqrt{2}\cos\theta = 0$ si et seulement si $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui est équivalent à « $\theta = \pm\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$ ». La réduction du domaine d'étude se fait de façon standard : $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ et $\rho(\theta+2\pi) = \rho(\theta)$, ce qui nous amène à étudier (le signe de) ρ sur $[0, 3\pi/4[\cup]3\pi/4, \pi]$.

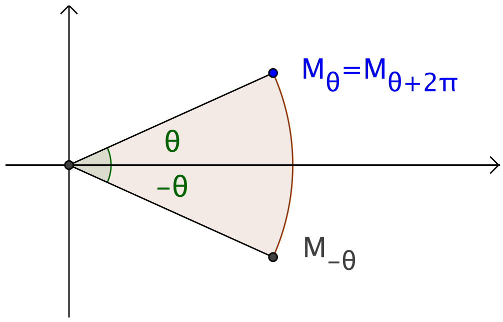

FIG. 1 – Les symétries habituelles

Le signe de ρ est d'ailleurs très simple à étudier sur ce domaine, puisque $\sin^2\theta \geq 0$...

θ	0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\rho(\theta)$	0	$+$	$\pm\infty$	$-$	0

Pour l'étude au voisinage de $\dfrac{3\pi}{4}$, on fait tourner le repère de façon standard :

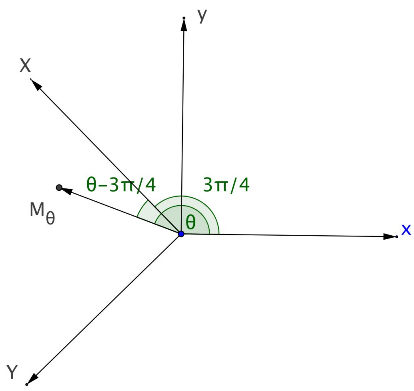

FIG. 2 – Faisons tourner le repère

Puis on calcule dans ce nouveau repère : $X(3\pi/4+u) = \rho(3\pi/4+u)\cos u \underset{u\to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$, avec de même $X(3\pi/4+u) \underset{u\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$, et enfin :

$$Y\left(\frac{3\pi}{4}+u\right) = \rho\left(\frac{3\pi}{4}+u\right)\sin u = \frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}+u\right)}{1+\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}+u\right)}\sin u \sim \frac{\frac{1}{2}}{1+\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-u\frac{\sqrt{2}}{2}+o(u)\right)}u \sim -\frac{1}{2},$$

donc l'arc paramétré possède pour asymptote la droite d'équation $Y = -\frac{1}{2}\cdot$ Les positions relatives peuvent être trouvées en faisant un développement limité de $Y(3\pi/4+u)$ à l'ordre 1 (il faut alors partir d'un développement limité du cosinus à l'ordre 2, dans le dénominateur de $\rho(3\pi/3+u)$. En plaçant par exemple $M_{\pi/2}$, on intuite d'ailleurs les positions relatives correctement.

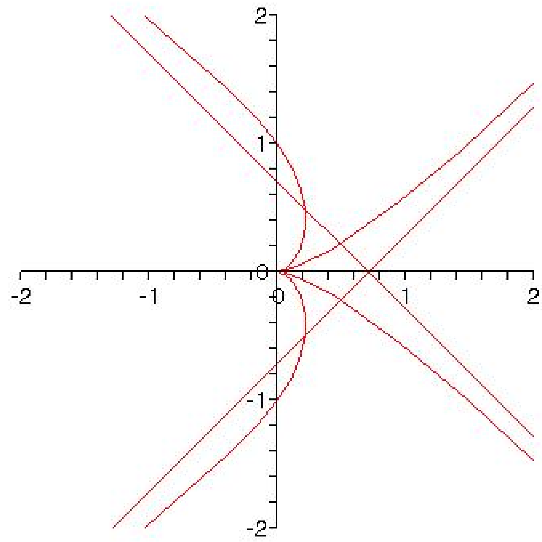

FIG. 3 – $\rho = \dfrac{\sin^2\theta}{1+\sqrt{2}\cos\theta}\cdot$

2 Une propriété de la cardioïde

1. La cardioïde a déjà été étudiée et tracée...

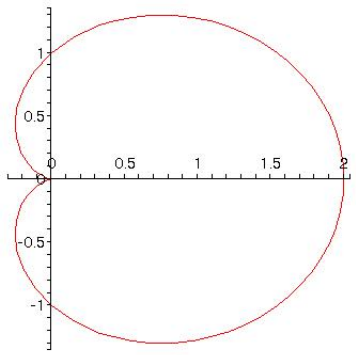

FIG. 4 – La cardioïde

2. Une maîtrise minimale des angles moitié conduit à :

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ 1+\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ 1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1 \end{pmatrix} = 2\cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = 2\cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

L'angle orienté $\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{V}\right)$ vaut donc $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}$, et ensuite :

$$\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{V}\right) = \underbrace{\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{e_r}\right)}_{\theta} + \left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{V}\right) = \frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\theta.$$

3. Fixons $\varphi \in]0,\pi[$. La tangente à la cardioïde en M_θ fait un angle $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3}{2}\theta$ avec $\overrightarrow{i}$. On aimerait que cet angle soit égal à φ modulo π. Lorsque θ décrit $]-\pi,\pi[$ (on exclut $\pm\pi$ pour décrire tous les points non-stationnaires de la cardioïde), $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3}{2}\theta$ décrit $]-\pi,2\pi[$, donc est égal à φ modulo π exactement trois fois : lorsqu'il vaut φ, $\varphi+\pi$, et $\varphi-\pi$ qui sont respectivement dans $]0,\pi[$, $]\pi,2\pi[$ et $]-\pi,0[$: il existe donc bien trois points de la cardioïde en lesquels la tangente fait un angle φ avec l'horizontale.

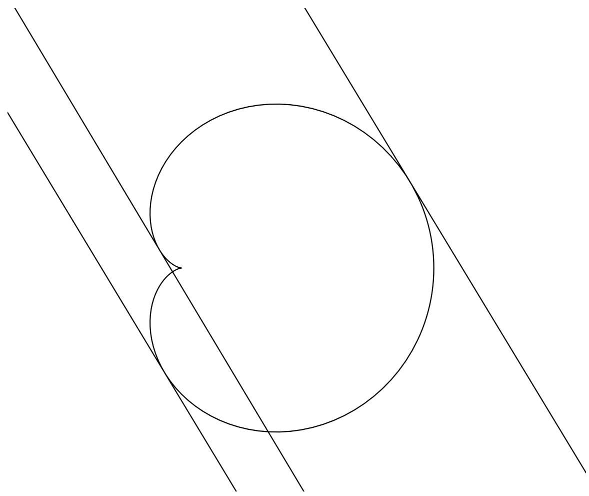

FIG. 5 – La cardioïde avec trois tangentes parallèles

Pour $\varphi=0$: $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3}{2}\theta=0$ si et seulement si $\theta=-\dfrac{\pi}{3}$ ou $\theta=\dfrac{\pi}{3}$: il y a exactement deux tangentes horizontales (les angles limites $\theta=\pm\pi$ correspondant à des « demi-tangentes »).

3 L'orthoptique de l'hyperbole

On mène les calculs comme pour l'ellipse, en commençant par fixer un point $M_0(x_0,y_0)$, une pente $p\in\mathbb{R}$, et en définissant D_p la droite de pente p passant par M_0. L'action se déroule dans un repère orthonormé, dans lequel l'hyperbole $\mathcal{H}$ a pour équation $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.
Comme pour l'ellipse, on ne se préoccupera pas des droites verticales... Il est d'ailleurs clair, ici, qu'il existe deux droites verticales tangentes à l'hyperbole. Puisqu'il n'y en a pas d'horizontale qui soit tangente, on aurait même pu travailler avec la « copente » pour paramétrer toutes les droites qui nous intéressent...

Ainsi, lorsque D_p n'est pas parallèle aux asymptotes (c'est-à-dire : lorsque $p\neq\pm\dfrac{b}{a}$), elle est tangente à $\mathcal{H}$ si et seulement si il existe un unique point appartenant à l'intersection, ce qui revient à l'existence d'un unique réel x vérifiant l'équation du second degré (oui, c'est bien du second degré ; pourquoi ?) :

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{p^2}{b^2}\right)x^2-\frac{2pq}{b^2}x-\frac{q^2}{b^2}-1=0 \qquad (E_1)$$

avec $q=y_0-px_0$. Mais (E_1) va posséder une unique solution si et seulement si son discriminant est nul, ce qui donne ici après calcul :

$$(x_0^2-a^2)p^2-2x_0y_0p+y_0^2+b^2=0. \qquad (E_2)$$

M_0 étant toujours fixé, libérons p et cherchons s'il existe deux pentes distinctes vérifiant cette équation. Ceci est équivalent au fait que le discriminant de (E_2) soit strictement positif, soit ici après calcul :

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1. \tag{I}$$

On se convainc plus ou moins facilement que la zone décrite par (I) est celle « entre les deux branches » (c'est à peu près clair géométriquement, pour avoir l'existence des deux tangentes).

Lorsque cette condition est vérifiée, les deux tangentes sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux, ce qui donne la condition $p_1p_2 = -1$, avec p_1 et p_2 les deux racines de (E_2). Mais le produit des racines de (E_2) se lit sur les coefficients : il vaut $\dfrac{y_0^2+b^2}{x_0^2-a^2}$, de sorte que la condition $p_1p_2 = -1$ est équivalente à :

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 - b^2.$$

Ainsi :

- Si $a < b$, l'orthoptique est vide.
- Si $a > b$, l'orthoptique est le cercle centré en 0 et de rayon $\sqrt{a^2-b^2}$.
- Si $a = b$, l'orthoptique semble être égale au singleton $\{O\}$. Géométriquement, on voit qu'il y a un problème. En y regardant de plus près, on constate que pour $x_0 = y_0 = 0$, l'équation (E_2) est en fait $a^2(p^2-1) = 0$, qui admet pour solutions 1 et -1, qui sont donc égales à $\pm\dfrac{b}{a}\cdot$ On a « oublié » de vérifier dans la résolution précédente que les solutions de (E_2) devaient être différentes de $\pm\dfrac{b}{a}$; voila typiquement le genre de situation où un (petit) manque de rigueur fait ressortir les cadavres des placards... Ce n'est pas bien grave dans ce genre de situation où il y a déjà beaucoup à faire. Cependant, il convient de reprendre à la loupe les résultats, quand ils apparaissent « géométriquement étrange » à la fin de la résolution.

Notons enfin que ces conditions sur a et b peuvent s'exprimer en termes de pente des asymptotes, le cas $a = b$ correspondant au cas limite de l'hyperbole équilatère. Le rapport $\dfrac{b}{a}$ est la valeur absolue de la pente des asymptotes : géométriquement, on peut là encore concevoir que si cette pente est strictement plus petite que 1, il va être possible de mener deux tangentes orthogonales, mais que ce sera plus difficile si cette pente est strictement plus grande que 1.

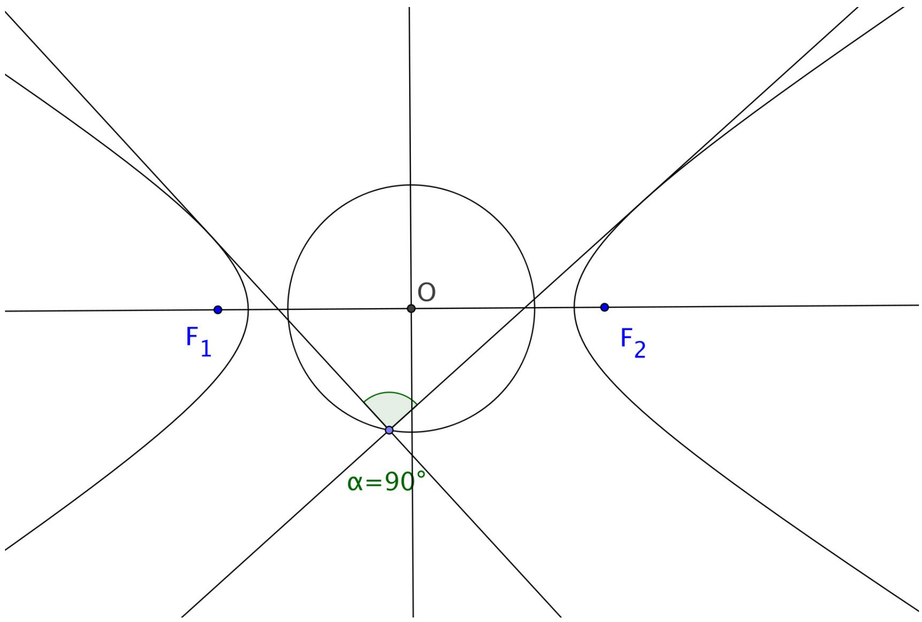

Fig. 6 – Une hyperbole et son orthoptique