1 Géométrie de grand-papa

1. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, les médianes de $\mathcal{T}$ issues de A (resp. B et C) ont pour équations respectives $y = x$, $x + \dfrac{y}{2} = 1$, et $\dfrac{x}{2} + y = 1$. Le système constitué de ces trois équations possède pour (unique) solution le couple $(1/3, 1/3)$, donc le point de coordonnées $(1/3, 1/3)$ appartient aux trois médianes... qui sont donc concourantes !
2. Le milieu A' de $[BC]$ est le barycentre de $\{(B,1),(C,1)\}$, donc le barycentre G de $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$ est aussi le barycentre de $\{(A,1),(A',2)\}$, donc G appartient à (AA'), c'est-à-dire la médiane à $\mathcal{T}$ issue de A. Le même raisonnement nous assure que G appartient aux deux autres médianes.
   Ainsi, les trois médianes ont un point en commun : G.
3. On travaille dans le repère $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, avec $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB}$, et $\overrightarrow{j}$ un vecteur de norme 1 orthogonal à $\overrightarrow{i}$. Dans ce repère, les différents points ont pour coordonnées : $A(0,0)$; $B(\alpha, 0)$ et $C(\beta, \gamma)$. Les trois hauteurs ont alors pour équations normales :
$$M(x,y) \in H_C \iff \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 0 \iff x = \beta,$$
$$M(x,y) \in H_B \iff \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0 \iff x\beta + \gamma y = \alpha\beta,$$
   et enfin :
$$M(x,y) \in H_A \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0 \iff x(\beta - \alpha) + \gamma y = 0.$$
   On a alors :
$$M(x,y) \in H_A \cap H_B \cap H_C \iff \begin{cases} x & & = \beta \\ \beta x & + \gamma y & = \alpha\beta \\ (\beta-\alpha)x & + \gamma y & = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x & = \beta \\ \gamma y & = \beta(\alpha - \beta) \\ \gamma y & = \beta(\alpha-\beta) \end{cases}$$
   et ce système possède bien une unique solution puisque $\gamma \neq 0$.
4. $(ACBE)$ est un parallélogramme, donc $AE = BC$. Si on note G le point d'intersection de D_C avec D_A, on obtient de même $AG = BC$, donc la hauteur de $\mathcal{T}$ issue de A est en fait un médiatrice de $[EG]$. Les trois hauteurs de $\mathcal{T}$ sont donc les trois médiatrices d'un triangle (EFG), donc sont concourantes, et c'est gagné.

2 Kapla

1. Le centre de gravité de la pièce supérieure est situé en son milieu, ce qui donne directement $\delta_1 = 1$.
2. Le problème est unidimensionnel : on se fiche de la position verticale du centre de gravité (par ailleurs facile à calculer). On va donc se repérer sur un seul axe, en prenant pour origine la partie inférieure droite de la pièce inférieure, et en orientant cet axe vers le centre de la pièce inférieure (j'ai la flemme de faire un croquis...). L'abscisse x_G du centre de gravité des deux premières pièces est alors $x_G = \dfrac{1}{2}\left(0 + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$, ce qui nous donne $\delta_2 = \dfrac{1}{4}\cdot$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Refaisons le raisonnement précédent : cette fois, on s'intéresse au barycentre G de $\{(G_1, n-1), (G_2, 1)\}$, avec G_1 le centre de gravité des $n-1$ pièces supérieures (donc d'abscisse 0, en prenant toujours pour origine le bas inférieure droit de la pièce inférieure) et G_2 le centre de gravité de la pièce inférieure (donc d'abscisse égale à $\dfrac{1}{2}$). On a alors directement $x_G = \dfrac{1}{n}\left(0 + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2n}\cdot$

4. Si on place quatre pièces de façon optimale, le plus grand décalage que l'on peut obtenir[1] est $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12} < 1$, donc la quatrième pièce ne peut être en surplomb de la première. Par contre, $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = \frac{11}{12} + \frac{1}{8} = \frac{25}{24} > 1$, donc la cinquième pièce peut être mise en surplomb de la première.

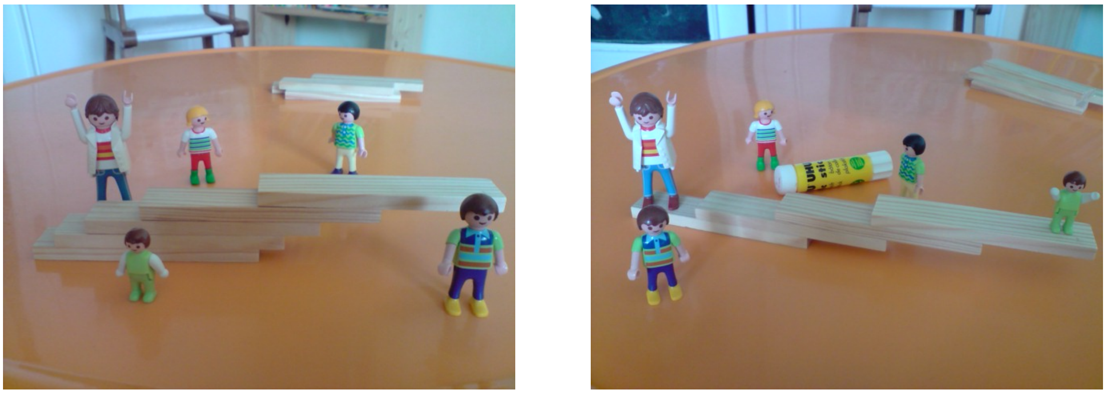

FIG. 1 – L'une de ces photos est bidonnée. Sauras-tu trouver laquelle ?

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En représentant le graphe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $[k, k+1]$, on « voit » que $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$ (et si on ne le voit pas, c'est qu'on a pas compris ce qu'est une intégrale, ou bien ce qu'est l'aire d'un rectangle). Pour le prouver formellement, on peut noter que pour tout $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$, donc en intégrant cette inégalité sur $[k, k+1]$, on obtient exactement le résultat souhaité.
   Si maintenant on somme ces inégalités pour k variant de 1 à n (en terminale, il est de bon ton de faire une récurrence, mais vous en êtes maintenant dispensés), on obtient :
$$\int_1^2 \frac{dt}{t} + \int_2^3 \frac{dt}{t} + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$
   Ce qui, après un coup de Chasles et un calcul élémentaire d'intégrale, nous donne l'inégalité souhaitée.
6. Soit $D > 0$. Puisque $\ln(n+1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe un rang n tel que $\ln(n+1) \geq 2D$ (oui, bon, il suffit de prendre $\lceil e^{2D} \rceil - 1$!). En prenant un tel n, et en optimisant les décalages comme vu plus haut, on peut construire un assemblage de $n+1$ pièces tel que le décalage entre les pièces supérieure et inférieure soit égal à $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}\ln(n+1) \geq D$, et c'est gagné !
   On a vu que pour $D = 1$, il suffit de prendre 5 pièces. On peut d'ailleurs noter que la valeur suffisante $\lceil e^2 \rceil = 8$ donnée par le raisonnement précédent est pessimiste. Pour $D = 2$, on est certain de pouvoir s'en sortir avec $\lceil e^4 \rceil = 55$ pièces. Voyons avec Maple ce qu'il en est :

```
n:=2:
while add(1/k,k=1..n-1)/2<2 do n:=n+1 od:
n;
                                    32
```

   Avec du soin et du temps, c'est peut-être faisable, mais ça devient vraiment difficile à réaliser !

3 Une courbe paramétrée

Pour information, cette courbe fut donnée à l'oral de l'X en 2008. Bien entendu, il n'y avait pas d'indication sur la façon de trouver la CNS pour que trois points de la courbe soient alignés !

[1]en fait, ce n'est qu'un majorant, mais dont on peut s'approcher très près, avec un peu de soin

1. Les fonctions x et y sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On a $x'(t) = \dfrac{(1-t)(1+t)}{(1+t^2)^2}$, donc le signe de $x'(t)$ n'est pas trop compliqué à déterminer. Par contre, $y'(t) = \dfrac{1+2t+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}$, donc on est amené à étudier la fonction auxiliaire $z : t \mapsto 1+2t+2t^2+t^4$. Pas de racine évidente, ni pour z ni pour z'. Par contre, $z''(t) = 4+12t^2 > 0$, donc z' est strictement croissante. Les limites de z' en $-\infty$ et $+\infty$, sa continuité et sa stricte croissante nous assurent que z' s'annule en un unique réel δ.

t	$-\infty$		δ		$+\infty$
$z'(t)$			$+$		
$z'(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$z(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$z(\delta)$	$\nearrow$	$+\infty$

La croissance de z' nous donne alors le signe de z', puis les variations de z. Cette dernière fonction possède ainsi un minimum en δ. Un petit coup de main de notre calculatrice/logiciel préféré nous assure que ce minimum est strictement positif. Ainsi, z ne prend que des valeurs strictement positives, et y est donc strictement croissante, ce qui nous permet de terminer le (double) tableau de variations (les limites de x et y en $\pm\infty$ étant claires) :

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$				$+$			

Il reste à représenter Γ :

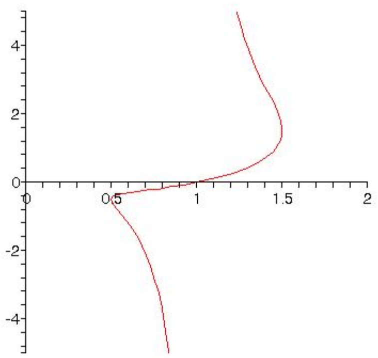

FIG. 2 – Une esquisse de Γ

Il semble difficile d'échapper à trois inflexions, correspondant à des paramètres dans les intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$.

2. (a) Les coordonnées de M_α vérifient l'équation de la droite, donc $y(\alpha) = px(\alpha) + q$, ce qui donne après nettoyage :

$$\alpha^3 + (1-p-q)\alpha^2 + (1-p)\alpha - p - q = 0.$$

Ainsi, sous les conditions de l'énoncé, α, β et γ sont racines du polynôme

$$P = X^3 + (1-p-q)X^2 + (1-p)X - p - q. \qquad (R_1)$$

On va alors admettre le résultat qui doit (devrait...) être naturel à défaut d'être évident : P se factorise $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$. Mais en développant cette forme factorisée, on trouve :

$$P = X^3 - (\alpha+\beta+\gamma)X^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma. \qquad (R_2)$$

Mais il y a unicité de l'écriture d'un polynôme comme combinaison linéaire des X^i, donc on peut identifier les coefficients entre (R_1) et (R_2), ce qui nous fournit $\alpha+\beta+\gamma = p+q-1$ et $\alpha\beta\gamma = p+q$, et donc :

$$\alpha+\beta+\gamma = \alpha\beta\gamma - 1.$$

NB : l'objet « polynôme » sera étudié un peu plus tard dans l'année, et on rendra alors licite la factorisation d'une part, et l'identification d'autre part.

(b) On suppose ici : $\alpha+\beta+\gamma = \alpha\beta\gamma - 1$. La question précédente nous invite à considérer le polynôme :

$$P = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) = X^3 - (\alpha+\beta+\gamma)X^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma.$$

On souhaiterait que P soit de la forme $X^3+(1-p-q)X^2+(1-p)X-p-q$. Pour cela, il *suffit* (et ici, nul besoin d'argument subtil d'unicité !) d'avoir $p+q-1 = \alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = 1-p$ et $\alpha\beta\gamma = p+q$.

L'hypothèse $\alpha+\beta+\gamma = \alpha\beta\gamma - 1$ nous assure que ces trois conditions sont équivalentes au système $\begin{cases} p+q &= \alpha+\beta+\gamma+1 \\ p &= 1-(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) \end{cases}$, système admettant clairement une solution (p,q).

Le couple (p,q) étant fixé ainsi, on a α, β et γ racines de $X^3+(1-p-q)X^2+(1-p)X-p-q$, donc M_α, M_β et M_γ appartiennent à la droite d'équation $y = px+q$. L'intersection entre cette droite et Γ est par ailleurs réduite à ces trois points (clair ?) : c'est ce qu'il fallait démontrer.

(c) D'après l'étude de la fonction x, il n'existe pas de t tel que $x(t) \in E_1 =]-\infty, 1/2[\cup]3/2, +\infty[$; les droite d'équation $x = K$ n'intersectent donc pas Γ lorsque $K \in E_1$.

Mais l'étude de x nous assure également que x prend exactement une fois les valeurs $1/2$, 1 et $3/2$, et exactement deux fois chaque valeur de $]1/2, 1[\cup]1, 3/2[$ (pour le « au plus », d'ailleurs suffisant, la stricte monotonie de x sur les différents intervalles suffit. Pour le « exactement », on a besoin d'établir que x réalise diverses bijections, donc la continuité doit être signalée). Ceci prouve le résultat donné dans l'énoncé.

(d) La question 2b nous assure que si $\alpha+\beta+\gamma = \alpha\beta\gamma - 1$, alors les points M_α, M_β et M_γ sont alignés.

Réciproquement, si ces points sont effectivement alignés, alors il sont sur une droite qui n'est pas « verticale » d'après la question 2c, donc d'équation $y = px+q$. La question 2a nous assure alors que $\alpha+\beta+\gamma = \alpha\beta\gamma - 1$.

Ainsi :

$$M_\alpha,\ M_\beta \textit{ et } M_\gamma \textit{ sont alignés si et seulement si } \alpha+\beta+\gamma = \alpha\beta\gamma - 1.$$

3. Intéressons-nous au produit mixte $\left[\overrightarrow{V}, \overrightarrow{A}\right] = \cdots = -\dfrac{2}{(1+t^2)^3}\underbrace{(t^3-3t-1)}_{\varphi(t)}$. Une étude sans génie assure que φ s'annule en changeant de signe en exactement trois réels. Il en va donc de même pour $\left[\overrightarrow{V}, \overrightarrow{A}\right]$, ce qui nous donne les trois points d'inflexion annoncés pour Γ.

4. Les trois racines t_1, t_2 et t_3 de $X^3 - 3X - 1$ vérifient, avec les arguments vus plus haut :

$$X^3 - 3X - 1 = (X-t_1)(X-t_2)(X-t_3) = X^3 - (t_1+t_2+t_3)X^2 + (t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)X - t_1t_2t_3,$$

et à nouveau en identifiant : $t_1+t_2+t_3 = 0$ et $t_1t_2t_3 = 1$, de sorte que $t_1+t_2+t_3 = t_1t_2t_3 - 1$, donc d'après la question 2, les trois points d'inflexion M_{t_1}, M_{t_2} et M_{t_3} sont alignés.