Trois au carré

À rendre le 16 Septembre 2009

1 Récurrons

1. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$
On fera une preuve par récurrence (et également, éventuellement, une preuve directe !)
2. Montrer que pour tout $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$:
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$
On interprétera ce résultat sur le triangle de Pascal.
3. On définit la suite (F_n) par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

2 Résolvons

1. Déterminer les $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\ -2x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 3 \end{array}\right.$
2. Résoudre : $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & - & z & - & t & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & + & t & = & 3 \\ 3x & + & 5y & + & 3z & + & 3t & = & 5 \\ 4x & + & 5y & - & z & - & t & = & 7 \end{array}\right.$
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & (3-\lambda)y & - & (2+\lambda)z & = & 5-\lambda \\ -2x & + & (\lambda-1)y & - & 4z & = & \lambda-5 \\ 3x & - & 3y & + & (8+\lambda)z & = & 1 \end{array}\right.$

3 Trigonométrons

1. On définit, pour $x \in \mathbb{R}$: $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{6} \cos(kx)$. Écrire $\varphi(x)$ sous forme factorisée, puis déterminer son signe pour $x \in [0, 2\pi]$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Trouver une expression « simple »[1] de :
$$\cos\theta + 2\cos(2\theta) + 3\cos(3\theta) + \cdots + n\cos(n\theta).$$
(on pourra introduire une fonction dont la dérivée...)
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les réels x vérifiant :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = 0.$$

[1] disons.. pas trop monstrueuse